Je me suis rendu compte que le nombre 1 peut s'écrire :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

donc aussi :

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}+\sqrt{\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}1+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}}}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}-\sqrt{\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}1+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}}}$$

et puis :

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt[3]{\frac{27+\sqrt{27^2+108}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{27-\sqrt{27^2+108}}{2}}-2}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{27+\sqrt{27^2+108}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{27-\sqrt{27^2+108}}{2}}-2}}-\sqrt[3]{\frac{27+\sqrt{27^2+108}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{27-\sqrt{27^2+108}}{2}}-4}\right)$$

Si, si. Mais pour la suite, la page n'est plus assez large.

Attention : ce ne sont pas des valeurs approchées mais bien la valeur exacte. Cependant, on ne peut le prouver que par un raisonnement.

Le premier peut se faire de tête.

Le second aussi mais avec un papier pour noter les résultats intermédiaires.

Le troisième nécessite nettement plus de moyens et beaucoup plus de temps. Je n'ai pas pu le faire « sur un coin de table ».

Je peux en faire plein d'autres avec ma recette. Soit par la résolution de : $x^3+px-p-1=0$ cela donne de « jolis » résultats quand *p* varie.
Avec une équation du quatrième degré du type $x^4+px^2+qx-p-q-1=0$, le résultat peut être encore plus spectaculaire.

Cà ne sert pas à grand-chose, sinon à montrer qu'on peut formuler deux nombres irrationnels différents dont la somme est entière.

Et même avec des nombres transcendants :

$$\sqrt[3]{\pi+(\pi+1)\sqrt{\frac{8\pi-1}{27}}}+\sqrt[3]{\pi-(\pi+1)\sqrt{\frac{8\pi-1}{27}}}$$

Ce qui est remarquable, c'est que si on remplace π par n'importe quel nombre de $\left[\frac{1}{8},+\infty\right]$, çà fait toujours 1. Par exemple :

$$\sqrt[3]{\sqrt[17]{13}+(\sqrt[17]{13}+1)\sqrt{\frac{8\sqrt[17]{13}-1}{27}}}+\sqrt[3]{\sqrt[17]{13}-(\sqrt[17]{13}+1)\sqrt{\frac{8\sqrt[17]{13}-1}{27}}}$$

Et si on remplace π par un nombre inférieur à 1/8 (par exemple 0), un nombre complexe, un quaternion, c'est pareil… !!

Amusant aussi : $\log_{\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}}\left(\sqrt[\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}]{32}\right)=1$

Pour les poètes, en chiffres romains, c'est très joli : $\sqrt[III]{IX + X\sqrt{\frac{LXXII}{XXVII}}} + \sqrt[III]{IX - X\sqrt{\frac{LXXII}{XXVII}}} = I$

En base 2 : $\sqrt[11]{101 + 110\sqrt{\frac{100111}{11011}}} + \sqrt[11]{101 - 110\sqrt{\frac{100111}{11011}}} = 1$

En base 16 : $\sqrt[3]{D + E\sqrt{\frac{67}{1B}}} + \sqrt[3]{D - E\sqrt{\frac{67}{1B}}} = 1$

En itérant :

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}+\sqrt{\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}}}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}-\sqrt{\sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}+\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}}}=1$$