Nekredebla estas la hazardo. Post du (apriore senrilataj) scivolemaj demandoj de liceano pri konata problemo de kuniklo-reprodukto (fakte konata de la komenco de la 13a jarcento sub la nomo « vico de Fibonacci », kies limesa po-operatoro estas la t.n. « ora nombro ») kaj poste pri baza trigonomio, mi mem aparte deziris reinformiĝi pri la polinomoj de Tchebitchev (fakte ne tre utilaj sed mi aŭdis pri ili kiam mi estis studento ĉar ili koncernas la elektronikajn filtrilojn). Fine mi volis pasigi tempon kalkulante *cos* pi/5 (*cos* = kosinuso) kiun oni zorge ignoras ĉe la liceo.

Kia hazardo do malkovri kiom ĉiuj tiuj nocioj estas en rilato. Plus krome la « periodaj vicoj » kaj la « nekonstrueblaj nombroj ».

Mi aldonis formuladon de *cos* pi/7 kaj *cos* pi/9 helpe de la imaginara unuo, kaj fine per specifaj metodoj *cos* pi/15 kaj *cos* pi/17.

Kiel kalkuli $\cos\frac{\pi}{5}$:

$$\cos 5\alpha = \frac{e^{5i\alpha} + e^{-5i\alpha}}{2} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^5}{2}$$

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha$$

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha(1-\cos^2\alpha) + 5\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)^2$$

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha(1-\cos^2\alpha) + 5\cos\alpha(1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)$$

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha \qquad \text{(polinomo de Tchebychev)}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \cos 5\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{10} \Rightarrow 16\cos^4\alpha - 20\cos^2\alpha + 5 = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{20\pm\sqrt{400-320}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}$$

De tio : $\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\varphi}{2}}$ do la duono de la ora nombro

Alia vid-maniero elde la ora nombro :

$$\alpha = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha = -1$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$(\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{\varphi+1}{4} \qquad (\frac{\varphi}{2})^3 = \frac{2\varphi+1}{8} \qquad (\frac{\varphi}{2})^4 = \frac{3\varphi+2}{16} \qquad (\frac{\varphi}{2})^5 = \frac{5\varphi+3}{32}$$

$$16(\frac{\varphi}{2})^5 - 20(\frac{\varphi}{2})^3 + 5\frac{\varphi}{2} = 16\frac{5\varphi+3}{32} - 80\frac{2\varphi+1}{32}5\varphi + 80\frac{\varphi}{32} = \frac{-32}{32} = -1$$

Do $\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2}}$

<u>Krome pri</u> $\cos\frac{\pi}{5}$:

La vicoj kies termoj estas difinitaj per lineara kombino (kun reelaj koeficientoj) de la antaŭaj termoj estas, laŭ la elekto de siaj unuaj termoj, aŭ geometriaj proprasence, aŭ asimptotaj al geometria vico. Tiukaze, oni nomos « po-operatoro » tion, kio fakte estas la « limeso de la po-operatoro ». La po-operatoro (ĉu reela ĉu ne) estas solvo de la karakteriza polinomo, mem facile deduktebla de la implica difino de la vico.

<u>Reela po-operatoro</u> (vicoj « eksponencialaj ») :

Ekzemplo 1 : la vico de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ kies po-operatoro estas $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ora nombro) solvo de la polinomo : $x^2 - x - 1 = 0$ $\varphi \approx 1{,}618$

➔ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Ekzemplo 2 : la vico de Pell $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ kies po-operatoro estas $\psi = 1+\sqrt{2}$ (arĝenta nombro) solvo de la polinomo : $x^2 - 2x - 1 = 0$ $\psi \approx 2{,}414$

➔ 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ...

Ekzemplo 3 : la vico $u_{n+2} = 3u_{n+1} + u_n$ kies po-operatoro estas $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (bronza nombro ?) solvo de la polinomo : $x^2 - 3x - 1 = 0$ $\beta \approx 3{,}302$

➔ 0, 1, 3, 10, 33, 109, 360, 1189, ...

Ekzemplo 4 : la vico $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$ kies po-operatoro estas $\tau = \frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1}{3}$ (nombro t.n. de Tribonacci) solvo de la polinomo : $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ $\tau \approx 1{,}8392$

➔ 0,1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...

<u>Notu</u> : La sinsekvaj potencoj de tiuj nombroj progresive proksimiĝas al entjeraj nombroj.

Kompleksa po-operatoro (kun modulo 1) (vicoj « periodecaj ») :

Ekzemplo : la vico $u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\frac{\pi}{5} - u_n$ kun po-operatoro $e^{\frac{i\pi}{5}}$ (kies reela parto estas $\cos\frac{\pi}{5}$) solvo de la polinomo : $(x-e^{i\frac{\pi}{5}})(x-e^{-i\frac{\pi}{5}}) = x^2 - 2\cos\frac{\pi}{5}x + 1 = 0$

La vico u_n estas **perioda** kun periodo je 10 (ĉar $2\pi = 10.\frac{\pi}{5}$). Do : $\forall n,\ u_{n+10} = u_n$ kio estas facile konstatebla numerale.

➔ 1, 1, 0.61803401, 3.67 10^{-8}, -0.61803395, -1, -1, -0.61803401, -3.67 10^{-8}, 0.61803395, 1, 1, …

Se la du unuaj valoroj estas malsamaj (respekt. 5 kaj -3 ĉi-poste), la vico konservas la saman periodon (do 10) :

➔ 5, -3, -9.8541021, -12.944272, -11.090170, -5, 3, 9.8541021, 12.944272, 11.090170, 5, -3, …

Notu ke tiu periodeco estas konstatebla ekde la komenco de la vico ; alidirite, evidentiĝas neniu karaktero asimptota, kiel estas kutime kiam la po-operatoro estas reela.

Kiel kalkuli $\cos\frac{\pi}{7}$:

$$\cos 7\alpha = \frac{e^{7i\alpha} + e^{-7i\alpha}}{2} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^7 + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^7}{2}$$

$$\cos 7\alpha = \cos^7\alpha - 21\cos^5\alpha\sin^2\alpha + 35\cos^3\alpha\sin^4\alpha - 7\cos\alpha\sin^6\alpha$$

$$\cos 7\alpha = \cos^7\alpha - 21\cos^5\alpha(1-\cos^2\alpha) + 35\cos^3\alpha(1-\cos^2\alpha)^2 - 7\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)^3$$

$$\cos 7\alpha = 22\cos^7\alpha - 21\cos^5\alpha + 35\cos^3\alpha(1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha) - 7\cos\alpha(1-3\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha-\cos^6\alpha)$$

$$\cos 7\alpha = 64\cos^7\alpha - 112\cos^5\alpha + 56\cos^3\alpha - 7\cos\alpha$$ (polinomo de Tchebychev)

$$\alpha = \frac{\pi}{14} \Rightarrow \cos 7\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = 64\cos^7\alpha - 112\cos^5\alpha + 56\cos^3\alpha - 7\cos\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{14} \Rightarrow 64\cos^6\alpha - 112\cos^4\alpha + 56\cos^2\alpha - 7 = 0$$

$$64X^3 - 112X^2 + 56X - 7 = 0$$ $X = \cos^2\alpha$

$$X^3 - 3\frac{112}{192}X^2 + \frac{168}{192}X - \frac{21}{192} = 0$$

$$(X - \frac{112}{192})^3 - 3(\frac{112}{192})^2 X + \frac{168}{192}X + (\frac{112}{192})^3 - \frac{21}{192} = 0$$

$$Y^3 + \frac{168.192 - 3.112.112}{192.192}(Y + \frac{112}{192}) + (\frac{112}{192})^3 - \frac{21}{192} = 0$$ $Y = X - \frac{112}{192}$

$$Y^3 - \frac{5376}{192.192}(Y + \frac{112}{192}) + (\frac{112}{192})^3 - \frac{21}{192} = 0$$

$$Y^3 - \frac{5376}{192.192}Y + \frac{-5376.112 + 112^3 - 21.192^2}{192^3} = 0$$

$$Y^3 - \frac{7}{48}Y + \frac{-602112 + 1404928 - 774144}{192^3} = 0$$

$$Y^3 - \frac{7}{48}Y + \frac{28672}{192^3} = 0$$

$$Y^3 - \frac{7}{48}Y + \frac{7}{1728} = 0$$

$$(U+V)^3 - \frac{7}{48}(U+V) + \frac{7}{1728} = 0$$ $U + V = Y$

$$U^3+V^3+(3UV-\frac{7}{48})(U+V)+\frac{7}{1728}=0$$

$U^3 kaj\ V^3$ solvoj de : $x^2+\frac{7}{1728}x+(\frac{7}{144})^3=0$

$$X=\sqrt[3]{-2\frac{7}{1728}+\sqrt{(\frac{7}{864})^2-16(\frac{7}{144})^3}}+\sqrt[3]{-2\frac{7}{1728}-\sqrt{(\frac{7}{864})^2-16(\frac{7}{144})^3}}+\frac{112}{192}$$

$$X=\sqrt[3]{-\frac{7}{864}+\sqrt{\frac{49}{746496}-\frac{1372}{746496}}}+\sqrt[3]{-\frac{7}{864}-\sqrt{\frac{49}{746496}-\frac{1372}{746496}}}+\frac{7}{12}$$

$$X=\sqrt[3]{-\frac{7}{864}+i\frac{7\sqrt{27}}{864}}+\sqrt[3]{-\frac{7}{864}-i\frac{7\sqrt{27}}{864}}+\frac{7}{12}$$

$$X=\cos^2\frac{\pi}{14}=\frac{1}{12}(\sqrt[3]{-\frac{7}{2}+i\frac{7\sqrt{27}}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{7}{2}-i\frac{7\sqrt{27}}{2}}+7)=\frac{1+\cos\frac{\pi}{7}}{2}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{7}=\frac{1}{6}(\sqrt[3]{-\frac{7}{2}+i\frac{7\sqrt{27}}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{7}{2}-i\frac{7\sqrt{27}}{2}}+1)}$$

Pro la kunesto de kubaj radikoj kaj de imaginaraj nombroj ne ebligas daŭrigi plu. Do per proksimumo :

$-\frac{7}{2}+i\frac{7\sqrt{27}}{2}=\rho e^{i\theta}$ $\qquad$ $\rho=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{49.27}{4}}=\sqrt{343}=7\sqrt{7}$ $\qquad$ $\rho e^{i\theta}=7\sqrt{7}(-\frac{1}{2\sqrt{7}}+i\frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{7}})$

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{6}(\sqrt[3]{-\frac{1}{2\sqrt{7}}+i\frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{7}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2\sqrt{7}}-i\frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{7}}}+\frac{1}{\sqrt{7}})$$

$tg\theta=-\sqrt{27}$ $\qquad$ $\theta\approx\pi-1{,}380670723$ radiano

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{6}(e^{i\frac{\theta}{3}}+e^{-i\frac{\theta}{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}})$$

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{6}(2\cos\frac{\theta}{3}+\frac{1}{\sqrt{7}})\approx\frac{\sqrt{7}}{6}(1{,}665240867+0{,}377964473)$$

$\boxed{\cos\frac{\pi}{7}=0{,}900968867}$ $\qquad$ same kiel per la poŝ-kalkulilo !!

Kiel kalkuli $\cos\frac{\pi}{9}$:

$\boxed{\cos\frac{\pi}{9}=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}})}$ estas la plej simpla formo imagebla. Sed ĝi havas du malavantaĝojn :

1. ĝi estas la sumo de du konjugitaj kompleksoj. Tio ŝajnas neevitebla, tamen …
2. ĝi simple diras ke $\frac{\pi}{9}$ estas la triono de $\frac{\pi}{3}$! Trop simple por esti interesa …

Laŭ la procedo uzata por $\cos\frac{\pi}{5}$ kaj por $\cos\frac{\pi}{7}$ kaj je la risko alfronti solvadon de kvaragrada ekvacio :

$\cos 9\alpha = 256\cos^9\alpha - 576\cos^7\alpha + 432\cos^5\alpha - 120\cos^3\alpha + 9\cos\alpha$ (polinomo de Tchebychev)

$$\alpha=\frac{\pi}{18}\Rightarrow \cos 9\alpha=\cos\frac{\pi}{2}=0=256\cos^9\alpha-576\cos^7\alpha+432\cos^5\alpha-120\cos^3\alpha+9\cos\alpha$$

$$\alpha=\frac{\pi}{18}\Rightarrow 256\cos^8\alpha-576\cos^6\alpha+432\cos^4\alpha-120\cos^2\alpha+9=0$$

$$256X^4-576X^3+432X^2-120X+9=0 \qquad X=\cos^2\alpha$$

$$\cos\frac{\pi}{18}\approx 0{,}984807753\Rightarrow \cos\frac{\pi}{9}\approx 0{,}93969262$$

$$X\approx 0{,}96984631 \qquad X^2\approx 0{,}940601865 \qquad X^3\approx 0{,}912239248 \qquad X^4\approx 0{,}884731869$$

$$X^4-4\frac{144}{256}X^3+\frac{432}{256}X^2-\frac{120}{256}X+\frac{9}{256}=0$$

$$(X-\frac{144}{256})^4-6(\frac{144}{256})^2X^2+4(\frac{144}{256})^3X-(\frac{144}{256})^4+\frac{432}{256}X^2-\frac{120}{256}X+\frac{9}{256}=0$$

$$Y^4+\frac{432.256-6.20736}{256.256}(Y+\frac{9}{16})^2+\frac{4.144.144.144-120.256.256}{256.256.256}(Y+\frac{9}{16})-(\frac{144}{256})^4+\frac{9}{256}=0$$

$$Y=X-\frac{9}{16}$$

$$Y^4-\frac{27}{128}(Y+\frac{9}{16})^2+\frac{46656-30720}{256.256}(Y+\frac{9}{16})-(\frac{9}{16})^4+\frac{9}{256}=0$$

$$Y^4-\frac{27}{128}(Y+\frac{9}{16})^2+\frac{249}{1024}(Y+\frac{9}{16})-(\frac{9}{16})^4+\frac{9}{256}=0$$

$$Y^4-\frac{27}{128}Y^2-\frac{243}{1024}Y+\frac{249}{1024}Y-\frac{2187}{32768}+\frac{249}{1024}(\frac{9}{16})-(\frac{9}{16})^4+\frac{9}{256}=0$$

$$Y^4-\frac{27}{128}Y^2+\frac{6}{1024}Y-\frac{4374}{65536}+\frac{8964}{65536}-\frac{6561}{65536}+\frac{2304}{65536}=0$$

$$Y^4 - \frac{27}{128}Y^2 + \frac{3}{512}Y + \frac{333}{65536} = Y^4 + k_1 Y^2 + k_2 Y + k_3 = 0$$

$Y^4 \approx 0{,}027533102$

$Y^2 \approx 0{,}165931016$ $\qquad k_1 \approx -0{,}2109375$

$Y \approx 0{,}40734631$ $\qquad k_2 \approx 0{,}005859375$

$k_3 \approx 0{,}005081176$

$(Y^2 + aY + b)(Y^2 - aY + c) = 0$ Metodo de Descartes

$$Y^4 + (b + c - a^2)Y^2 + a(c - b)Y + bc = 0$$

$b = \frac{1}{2}(a^2 + k_1 - \frac{k_2}{a})$ $\qquad c = \frac{1}{2}(a^2 + k_1 + \frac{k_2}{a})$ $\qquad bc = k_3$

$$a^6 + 2k_1 a^4 + (k_1^2 - 4k_3)a^2 - k_2^2 = 0$$

$a'^3 + 2k_1 a'^2 + (k_1^2 - 4k_3)a' - k_2^2 = 0$ $\qquad a' = a^2$

$$a'^3 - 3\frac{9}{64}a'^2 + \frac{99}{4096}a' - \frac{9}{262144} = 0$$

$$(a' - \frac{9}{64})^3 - 3\frac{81}{4096}a' + \frac{99}{4096}a' + \frac{729}{262144} - \frac{9}{262144} = 0$$

$a''^3 - \frac{9}{256}(a'' + \frac{9}{64}) + \frac{45}{16384} = 0$ $\qquad a'' = a' - \frac{9}{64}$

$$a''^3 - \frac{9}{256}a'' - \frac{9}{4096} = 0$$

$(U + V)^3 - \frac{9}{256}(U + V) - \frac{9}{4096} = 0$ $\qquad U + V = a''$

$$U^3 + V^3 + (3UV - \frac{9}{256})(U + V) - \frac{9}{4096} = 0$$

U^3 *et* V^3 solvoj de : $x^2 - \frac{9}{4096}x + (\frac{3}{256})^3 = 0$

$$a' = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{9}{4096} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{9}{4096})^2 - 4(\frac{3}{256})^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{9}{4096} - \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{9}{4096})^2 - 4(\frac{3}{256})^3}} + \frac{9}{64}$$

$$a' = \frac{1}{16}(\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{81 - 108}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{81 - 108}}) + \frac{9}{64}$$

$$a' = \frac{1}{16}(\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \frac{9}{4})$$

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \frac{9}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}}$$

Do : $a \approx 0{,}59484631$

$b = \frac{1}{2}(a^2 + k_1 - \frac{k_2}{a}) \approx 0{,}066527199$ $\qquad c = \frac{1}{2}(a^2 + k_1 + \frac{k_2}{a}) \approx 0{,}076377433$

Do, numerala kalkulo montras kue : $Y^2 - aY + c = 0$

$$\cos\frac{\pi}{9} = 2X - 1 = 2(Y + \frac{9}{16}) - 1 = 2Y + \frac{1}{8} = a + \sqrt{a^2 - 4c} + \frac{1}{8}$$

$\boxed{\cos\frac{\pi}{9} \approx 0{,}93969261}$ (la poŝ-kalkulilo trovis la samon !!)

Formulado :

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \frac{9}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}}$$

$$c = \frac{1}{2}(a^2 + k_1 + \frac{k_2}{a}) = \frac{1}{256}(16\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} - 9 + \frac{3}{\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}}})$$

$$\cos\frac{\pi}{9} = a + \sqrt{a^2 - 4c} + \frac{1}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{64} - \frac{1}{64}(16\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} - 9 + \frac{3}{\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}}})} + \frac{1}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{64} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{64} - \frac{1}{64}\frac{3}{\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}}}} + \frac{1}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}} + \sqrt{-\frac{\sqrt{3}}{8}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{32} - \frac{3}{64\sqrt{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} + \frac{9}{4}}}} + \frac{1}{8}$$

Noto : la plej simpla esprimo tamen restas : $\cos\frac{\pi}{9} = 2\cos^2\frac{\pi}{18} - 1$!!

Nu, sufiĉas anstataŭigi $2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}$ per $\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}}$ kaj jen :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{4}\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \frac{9}{4}} + \sqrt{-\frac{1}{16}(\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}}) + \frac{9}{32} - \frac{3}{64\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}} + \frac{9}{4}}}} + \frac{1}{8}}$$

Kiel kalkuli $\cos\frac{\pi}{15}$:

$$\cos\frac{\pi}{15}=\cos(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{1}{2}(\frac{(1+\sqrt{5})^2}{8}-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}2\frac{(1+\sqrt{5})}{4}\sqrt{1-\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}}$$

$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}\sqrt{\frac{16-(1+\sqrt{5})^2}{16}}$$

$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{\sqrt{5}-1}{8}+\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{15})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{15}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}-1}{8}}$$

Kiel kalkuli $\cos\frac{\pi}{17}$ (ekzerco proponita de Jean-Michel Ferrard / www.klubprepa.net):

Unue ni demonstru ke : $\forall a \in R, \forall h \in]0,\pi[, \forall n \in N^*, \sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{\sin h}$

$$\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+2kh)}) = \mathrm{Re}(e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kh}) = \mathrm{Re}(e^{ia}\frac{1-e^{2inh}}{1-e^{2ih}}) = \mathrm{Re}(e^{ia}\frac{e^{inh}}{e^{ih}}\frac{(e^{inh}-e^{-inh})}{(e^{ih}-e^{-ih})}) = \mathrm{Re}(e^{i(a+(n-1)h)}\frac{\sin nh}{\sin h})$$

Donc : $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a+(n-1)h)}{\sin h}$

Se $x_1 = \cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} + \cos\frac{7\pi}{17} + \cos\frac{11\pi}{17} > 0$

kaj $x_2 = \cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{9\pi}{17} + \cos\frac{13\pi}{17} + \cos\frac{15\pi}{17}$

$$x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^{7}\cos(\frac{\pi}{17} + k\frac{2\pi}{17}) = \frac{\sin(\frac{8\pi}{17})\cos(\frac{\pi}{17}+\frac{7\pi}{17})}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{16\pi}{17})}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 x_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17} + \cos\frac{12\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17})$$

$$x_1 x_2 = 2\frac{\sin\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}}\cos(\frac{2\pi}{17} + \frac{7\pi}{17}) = -1$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$

$$y_1 = \cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} \qquad y_2 = \cos\frac{7\pi}{17} + \cos\frac{11\pi}{17}$$

$$y_1 + y_2 = x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$$y_1 y_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{7}\cos(\frac{2\pi}{17} + k\frac{2\pi}{17}) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{8\pi}{17}\cos(\frac{2\pi}{17}+\frac{7\pi}{17})}{\sin\frac{\pi}{17}} = -\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{\pi}{17} + \sin\frac{17\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = -\frac{1}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_2 = \frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$$

$$y_3 = \cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{13\pi}{17} \qquad\qquad y_4 = \cos\frac{9\pi}{17} + \cos\frac{15\pi}{17}$$

$$y_3 + y_4 = x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$

$$y_3 y_4 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{7}\cos\left(\frac{2\pi}{17} + k\,\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{8\pi}{17}\cos\left(\frac{2\pi}{17}+\frac{7\pi}{17}\right)}{\sin\frac{\pi}{17}} = -\frac{1}{4}\,\frac{\sin\frac{\pi}{17}+\sin\frac{17\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = -\frac{1}{4}$$

$$y_3 = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \qquad\qquad y_4 = \frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{13\pi}{17} = -\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{13\pi}{17} = \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16}$$

$$\cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{13\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{(1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}})^2+16(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}})}}{16}$$

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+\sqrt{(2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}})^2}}}{16}$$

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+\sqrt{4(1-\sqrt{17})^2(34-2\sqrt{17})+512(1-\sqrt{17})\sqrt{17}+8704+512\sqrt{17}}}}{16}$$

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{(18-2\sqrt{17})(34-2\sqrt{17})+256\sqrt{17}}}}{16}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{680+152\sqrt{17}}}}{16}}$$

Noto : esprimi $\cos\pi/n$ helpe de kvadrataj radiko estas escepte ; Gauss montris ke la solaj valoroj de n ĉe kiuj tio eblas estas la nombroj de Fermat (je la formo $2^{2^k}+1$) se ili estas primoj. Nu, la solaj primaj nombroj de Fermat konataj estas 3, 5, 17, 257 kaj 65537 (apriore ne ekzistas aliaj) ; vidu M. Guinot, Gauss libron V volumon 2, p.180.

Resumo

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\varphi}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{1}{6}(\sqrt[3]{-\frac{7}{2}+i\frac{7\sqrt{27}}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{7}{2}-i\frac{7\sqrt{27}}{2}}+1)$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{9}=\frac{1}{4}\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}i\sqrt{3}}+\frac{9}{4}}+\sqrt{-\frac{1}{16}(\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}i\sqrt{3}})+\frac{9}{32}-\frac{3}{64\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}i\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}i\sqrt{3}}+\frac{9}{4}}}}+\frac{1}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

$$\cos\frac{\pi}{15}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}-1}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{17}=\frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{680+152\sqrt{17}}}}{16}$$

Christian Rivière

(la 5an de julio 2020-a)