Raisonnement mathématique

Raisonnement

Il existe trois grands types de raisonnement : la déduction, l'abduction et l'induction. Ils s'énoncent en utilisant trois éléments : la cause, l'effet (implication) et la conséquence.

La **déduction** :
si *a* est vrai,
et si « *si a est vrai alors b est vrai* » est vrai,
alors *b* est vrai.

L'**abduction** :
si *b* est vrai,
et si « *si a est vrai alors b est vrai* » est vrai,
alors *a* est vrai.

L'**induction** :
si *a* est vrai,
et si *b* est vrai,
alors « *si a est vrai alors b est vrai* » est vrai.

Un raisonnement est dit **déductif** s'il ne s'appuie que sur la règle de déduction ; il est dit **hypothétique** s'il s'appuie sur au moins l'une des règles d'abduction ou d'induction.

La déduction repose sur des causes et des effets certains et aboutit à énoncer des conséquences certaines.

L'abduction recherche des causes plausibles à des conséquences atestées, selon des effets certains. Le raisonnement par abduction n'aboutit pas à une vérité, mais apporte une hypothèse probable (sur la cause) dont la véracité reste à vérifier.

L'induction propose des effets probables entre des causes certaines et des conséquences atestées. Le raisonnement par induction n'aboutit pas à une vérité, mais apporte une hypothèse probable (sur l'effet) dont la véracité reste à démontrer (au moins statistiquement).

Principes

Le principe de **non-contradiction** nous dit qu'une assertion et sa négation ne peuvent être vraies toutes les deux.

Le principe du **tiers-exclu** nous dit que soit une assertion est vraie, soit sa négation est vraie. Il les empêche d'être toutes les deux fausses.

La « loi de l'alternative » (Robert Blanché) résulte de la conjonction du principe de non-contradiction et du principe du tiers-exclu. À eux deux, ces principes participent à fonder la logique mathématique formelle dite *classique*. La logique **intuitionniste**, quant à elle, n'inclut pas le principe du tiers-exclu.

Voici des formulations équivalant au tiers-exclu, parmi les plus connues :

$non\text{-}non\text{-}p = p$	Réciprocité
$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$	Loi de Pierce
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (non\, p \vee q)$	Implication vue comme une disjonction
$non\,(non\, p \wedge non\, q) \Rightarrow (p \vee q)$	Loi de De Morgan
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (non\, q \Rightarrow non\, p)$	Contraposition

Ecoles

La conception **platonicienne** règne jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Pour Platon, le monde perçu n'est qu'apparence. Le monde vrai est un monde d'idées que les mathématiques aident à explorer. Les objets mathématiques sont réels et le mathématicien ne fait que les redécouvrir.

Le **réalisme** affirme ainsi l'existence des entités mathématiques, indépendamment et préalablement à la connaissance que nous en avons : nombres, figures, ensembles, fonctions, variétés, etc. Pour le réaliste, le mathématicien manipule des objets bien déterminés qui défient son intelligence. Connaître n'est pas inventer, mais découvrir des éléments, des opérations, des fonctions, des méthodes de démonstration. Le mathématicien le plus imaginatif ne fait que « trouver » des solutions en fonction des contraintes d'objets et d'opérations qui imposent leurs modalités propres. Les propositions mathématiques vraies expriment des propriétés essentielles de ces opérations et objets. Par exemple, selon ce point de vue, le « théorème de Fermat » était vrai avant qu'on en trouve une démonstration.

Au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, l'apparition de géométries non euclidiennes a ébranlé cette conception. Quelques mathématiciens, dont Cantor et Russell développèrent la théorie des ensembles et la logique, afin d'établir des fondations solides, cohérentes et indiscutables.

Mais l'apparition de nombreux paradoxes inhérents à la théorie des ensembles, conduit au développement du **formalisme** (Hilbert, Bourbaki) vers les années 30. Les mathématiques deviennent une œuvre humaine et non plus divine. Ils ne constituent pas un monde abstrait que l'on redécouvre, mais un langage axiomatique que l'on invente, et soigneusement choisi pour éliminer les paradoxes. Cette conception se concrétise dans les années 70 par la fameuse réforme des « maths modernes ». Elle s'éloigne sensiblement des autres disciplines (physique) et refuse le rôle de l'intuition.

Mais Gödel démontre en 1931 que, quels que soient les axiomes de départ d'une théorie mathématique, celle-ci inclurait toujours des résultats indécidables (dont on ne peut décider s'ils sont contradictoires ou non).

L'**intuitionnisme** (Brouwer vers 1920) se situe entre le réalisme et le formalisme. Les mathématiques ne sont ni un objet abstrait (comme le pensent les réalistes) ni un langage axiomatique (comme le pensent les formalistes), mais des résultats successifs obtenus par les mathématiciens. Il n'y a pas de vérité sans expérience de la vérité. Comme le formalisme, il élimine les paradoxes. D'autre part, il exclut la notion d'infini, puisqu'aucun sujet infini ne peut être traité en un temps fini. Il rejette aussi le principe du tiers-exclu. Il s'ensuit la négation d'une grande partie des résultats du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, ainsi que le théorème du point fixe de … Brouwer. Cependant, l'intuitionnisme était populaire chez les utilisateurs, dont les physiciens.

Le **constructivisme** (Bishop en 1967) considère que l'on ne peut démontrer l'existence d'objets mathématiques, qu'en donnant une **construction** de ceux-ci. Le constructivisme est une position minoritaire chez les mathématiciens et les mathématiques constructives sont beaucoup moins développées que les mathématiques classiques. Le constructivisme rapproche des démarches algorithmiques.

Les constructivistes ne considèrent pas que le raisonnement par l'absurde est universellement valide, une preuve d'existence par l'absurde (c.-à-d. une preuve où la non-existence entraîne une contradiction) ne conduisant pas en soi à une construction de l'objet.

Exemple 1 :
On se propose de démontrer que « Il existe des nombres irrationnels a et b, tels que a^b est rationnel ». Considérons la démonstration suivante :

> On sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel et que 2 est rationnel. Notons φ la proposition « $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est rationnel ». Appliquons le tiers-exclu : φ est vraie ou φ est fausse.
>
> si φ est vraie alors les irrationnels $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ conviennent ;
>
> si φ est fausse alors les irrationnels $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}$ conviennent, puisque $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ est rationnel ».

Cette démonstration n'est pas constructive. En effet, de par son utilisation du tiers-exclu, elle n'exhibe pas une solution explicite, mais démontre seulement l'existence d'un couple-solution sans pouvoir préciser lequel (puisqu'on ne sait pas si φ est vraie ou fausse).

Note : En fait, φ est faux car d'après le théorème de Gelfond-Schneider, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est même transcendant.

Exemple 2 :

On se propose de démontrer que $]0;1[$ et $[0;1]$ sont équipotents, donc qu'il existe une bijection entre ces deux ensembles continus. Considérons la fonction effectivement bijective f :

$f(1/2)=0$ et $f(1/3)=1$

si x est de la forme $1/n$ pour $n>3$: $f(x)=1/(n-2)$

si x n'est pas de la forme $1/n$: $f(x)=x$

Cette démonstration, proposant une solution, est constructive, alors que l'existence d'une injection dans les deux sens (ce qui serait suffisant pour démontrer l'équipotence), ne constituerait pas une démonstration constructive, ne proposant pas de solution.

Notions principales

Axiome

Définition :

Vérité indémontrable mais évidente pour quiconque en comprend le sens (principe premier), et considérée comme universelle. (Robert 2007)

Proposition première, vérité admise sans démonstration et sur laquelle se fonde un raisonnement ; principe posé hypothétiquement à la base d'une théorie déductive. (Larousse 1989)

Aksiomo : Fundamenta aserto, el kiu oni eliras por pruvi teoremojn. (PIV)

Commentaire :

Un axiome sert à exprimer une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes qui définit la théorie est appelé **axiomatique** ou théorie axiomatique. Cette axiomatique doit être non contradictoire.

Exemple :

Les cinq axiomes de Peano pour définir les entiers naturels :

L'élément appelé zéro et noté 0 est un entier naturel.

Tout entier naturel n a un unique successeur, noté $s(n)$ ou S_n qui est un entier naturel.

Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.

Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.

Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est $\boldsymbol{N}$.

Postulat

Définition :

Principe d'un système déductif qu'on ne peut prendre pour fondement d'une démonstration sans l'assentiment de l'auditeur. (Robert 2007)

Point de départ indémontrable mais tenu pour incontestable. (Robert micro 1991)

Postulato : Tezo, pri kiu oni postulas pro la bezono de la demonstrado, ke ĝi estu akceptata kiel vera, kvankam ne demonstrita. (PIV)

Exemples :

« Par deux points donnés, on ne peut mener qu'une seule droite. » « Un plan contient entièrement la droite passant par deux de ses points. » « Une droite est le plus court chemin d'un point à un autre. »

Conjecture

Définition :

Hypothèse émise a priori concernant une proposition dont on ignore la démonstration. (Robert 2007)

Konjekto : Io supozata sed ne certa opinio, konkludo aŭ klarigo. (laŭ PIV)

Commentaire :

Une conjecture peut devenir théorème après démonstration (théorème de Fermat : « Il n'existe pas de nombres entiers strictement positifs x, y et z tels que : $x^n+y^n=z^n$ dès que n est un entier strictement supérieur à 2 »), rester une conjecture par manque de démonstration satisfaisante (conjecture de Goldbach : « Tout nombre entier pair supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers »), ou disparaître après la découverte d'un contre-exemple (conjecture d'Euler : « Pour tout entier n strictement supérieur à 2, la somme de $n - 1$ puissances n-ièmes n'est pas une puissance n-ième. Or, $27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$ »)

Hypothèse

Définition :

Proposition admise comme donnée d'un problème, ou pour la démonstration d'un théorème. (Robert micro 1991)

Hipotezo : Nepruvita supozo, provizore akceptita kadre de demonstrado de teoremo.

Commentaire :

Une hypothèse est une aide dans le cadre d'un raisonnement ou d'une démonstration. Différentes situations peuvent se présenter : 1. recherche de cause (abduction), dont la véracité dans le contexte reste à prouver ; 2. prises en compte successives des cas d'un arbre de décision pour traitement (exhaustion) ; 3. supposition du contraire d'une proposition que l'on veut prouver, pour en déduire une proposition fausse (preuve par l'absurde) ; 4. limitation provisoire de l'ensemble des valeurs d'une variable objet d'un théorème, afin de réaliser une démonstration spécifique à ce sous-ensemble de valeurs (disjonction des cas) ; 5. supposition de la véracité d'une propriété pour un élément d'une suite, puis déduction que cette propriété se vérifie pour l'élément suivant (récurrence).

Lemme

Définition :

Résultat intermédiaire utilisé en cours de raisonnement lors d'une longue démonstration. (Robert 2007)

Proposition déduite d'un ou de plusieurs postulats dont la démonstration prépare celle d'un théorème. (Larousse 1989)

Lemo : Aserto kiu estas helpa survoje al pli ĉefa aserto. (PIV)

Exemple :

Lemme d'Euclide : « Soient b et c deux entiers. Si un nombre premier p divise le produit bc, alors p divise b ou c ». S'ensuivent plusieurs théorèmes connus, par exemple sur l'unicité de la forme irréductible d'une fraction.

Théorème

Définition :

Proposition démontrable qui résulte d'autres propositions déjà posées. (Robert 2007)

Expression d'un système formel, démontrable à l'intérieur de ce système. (Larousse 1989)

Teoremo : Tre grava aserto en matematika teorio. (PIV)

Corollaire

Définition :

Conséquence directe d'un théorème déjà démontré. (Robert 2007)

Proposition qui se déduit immédiatement d'une proposition déjà démontrée. (Larousse 1989)

Korolario : Aserto, en matematika teorio, kiu relative facile sekvas el teoremo aŭ propozicio. (PIV)

Paradoxe

Définition :

Se dit d'une proposition qui est à la fois vraie et fausse. (Robert 2007)

Paradokso : Kontraŭdiro, al kiu kondukas en iaj okazoj abstrakta rezono. (PIV)

Commentaire :

Il faut distinguer le paradoxe sémantique (« Je mens ») souvent dû à une autoréférence (métalangue), et le paradoxe logique très souvent lié à la manipulation de l'infini ou aux problèmes d'appartenance (théorie des ensembles). C'est le second qui nous intéresse ici.

Exemple :

Paradoxe de John Littlewood : des boules numérotées 1, 2, 3, … sont placées dans une urne selon la procédure suivante : une minute avant minuit les boules 1 à 10 sont placées et la boule 1 retirée ; une demi-minute avant minuit les boules 11 à 20 sont placées et la boule 2 retirée ; un tiers de minute avant minuit les boules 21 à 30 sont placées et la boule 3 retirée, etc. Le nombre de boules dans l'urne tend vers l'infini quand t tend vers minuit, mais il est nul à minuit.

Indécidable

Définition :

Une proposition est indécidable dans une théorie donnée si celle-ci ne peut démontrer ni la proposition, ni son contraire (indécidabilité logique) ou s'il n'est pas possible de trouver un algorithme général permettant de décider dans un temps fini (indécidabilité algorithmique).

Nedecideblaĵo : Propozicio estas nedecidebla en specifa teorio se tiu ĉi povas demonstri nek la propozicion, nek ties malon (logika decideblo), aŭ se ne estas eble trovi ĝeneralan algoritmon kiu ebligas decidon en finia tempo (algoritma decideblo).

Exemple :

Peut-on trouver un algorithme général permettant de décider, pour n'importe quelle équation polynomiale à coefficients entiers, si cette équation possède des solutions entières ? En 1970, Youri Matiiassevitch démontre qu'un tel algorithme n'existe pas.

Formulation

Sur le plan syntaxique, coexistent les constituants servant à identifier ou nommer des éléments du domaine (**variables**, **constantes**, **termes**) et les constituants servant à exprimer des propriétés ou des relations entre ces éléments (**prédicats** ou **formules**). Lorsqu'un prédicat concerne un élément, on dit qu'il exprime une **propriété**, et lorsqu'il concerne deux ou plusieurs éléments, on dit qu'il exprime une **relation**.

Sont utilisés :

. des variables pour dénoter des éléments du domaine ;
. des prédicats (ou relations) sur les éléments ;
. des connecteurs logiques (et, ou, implique etc.) ;
. deux quantificateurs, l'un universel (« quel que soit », « pour tout » noté ∀) et l'autre existentiel (« il existe au moins un », noté ∃).

Note : on pourrait se contenter d'un seul quantificateur ∀ et de deux connecteurs logiques *non* et *et*. Par exemple « $\exists x\ P(x)$ » est défini comme « *non* ($\forall x$ *non*$P(x)$) ».

x+1 est un terme
0+1+1 est un terme clos
$x<y+1$ est une formule (prédicat)
0+1+1<0+1+1+1 est une formule close.

Lorsqu'une variable appartient à une sous-formule précédée d'un quantificateur, $\forall x$ ou $\exists x$, elle est dite **liée par ce quantificateur**. Si une variable n'est liée par aucun quantificateur, elle est **libre**. On appelle **énoncé** une formule (ou ensemble de formules) dont toutes les variables sont liées par un quantificateur (donc qui n'a pas de variable libre).

La distinction entre variable libre et variable liée est importante. Une variable liée ne possède pas d'identité propre et peut être remplacée par n'importe quel autre nom de variable qui n'apparaît pas dans la formule. Ainsi, $\exists x\ x<y$ est identique à $\exists z\ z<y$ mais pas à $\exists x\ x<z$ et encore moins à $\exists y\ y<y+1$ (évidence) ou $\exists y\ y<y$ (stupidité).

Une **formule close** est une formule dont toutes les variables sont liées. Un **prédicat** est une formule qui contient une ou plusieurs variables libres. On peut considérer les prédicats comme des concepts. Ainsi, $\forall x\ \exists y\ x<y$ est une formule close du langage de l'arithmétique. $\forall x\ x<z$ est un prédicat portant sur la variable z.

Démonstration

Déduction logique

C'est le mode de démonstration le plus simple.

Exemple :

si $A \subset B$ *et* $B \subset C$ alors $A \subset C$

Disjonction des cas

Observations successives de plusieurs cas particuliers, éventuellement traités par des méthodes différentes.

Exemple :

Démontrer que $P_n = n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3 :

si $n \equiv 0[3]$ alors $P_n \equiv 0[3]$

si $n \equiv 1[3]$ alors $2n+1 \equiv 0[3]$ alors $P_n \equiv 0[3]$

si $n \equiv 2[3]$ alors $n+1 \equiv 0[3]$ alors $P_n \equiv 0[3]$

Démonstration par le contre exemple

Pour démontrer qu'une proposition est fausse (que son contraire est vrai), il suffit d'exhiber un contre-exemple.

Exemple :

Une fonction dérivable a une dérivée continue.

Contre-exemple : $f(x) = x^2.\sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

$f'(x) = 2x.\sin(1/x) - \cos(1/x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, or f est dérivable et $f'(0) = 0$

Démonstration par l'absurde

Consiste à supposer que la proposition est fausse, donc que son contraire est vrai, puis en déduire une absurdité. La proposition contraire ne peut donc être vraie (le vrai ne peut impliquer que le vrai), elle est donc fausse et la proposition d'origine est vraie.

Exemple :

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel :

si $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel, alors $\exists(p,q)$ premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = p/q$

alors $p^2 = 2q^2$ et par décomposition en nombres premiers, 2 apparaîtrait un nombre pair de fois dans le terme de gauche et un nombre impair de fois dans le terme de droite, ce qui serait absurde.

Méthode d'exhaustion

Pour démontrer un résultat de la forme $X=Y$, on raisonne deux fois par l'absurde pour rejeter successivement les deux inégalités $X > Y$ et $X < Y$. Cette méthode est attribuée à Euxode de Cnide (408av.J.-C 355 av.J.-C).

Exemple :

Démontrer que le rapport des surfaces de deux disques D et D' est égal au rapport du carré de leurs diamètres d et d' (Proposition 2 du livre XII des Eléments d'Euclide)

On suppose que $D / D' > d^2 / d'^2$.

On construit deux polygones P et P' semblables inscrits dans les disques, tels que $P / D' > d^2 / d'^2$ Sachant que $P / P' = d^2 / d'^2$ donc $D / D' > P / D' > d^2 / d'^2$ donc $P / D' > P / P'$ donc $D' < P'$ ce qui est absurde.

On procède de manière analogue pour l'inégalité inverse $D / D' < d^2 / d'^2$.

On construit deux polygones P et P' semblables inscrits dans les disques, tels que $D / P' < d^2 / d'^2$ Sachant que $P / P' = d^2 / d'^2$ donc $D / D' < D / P' < d^2 / d'^2$ donc $D / P' < P / P'$ donc $D < P$ ce qui est absurde.

Démonstration par la contraposée

Prouver que $A \Rightarrow B$ revient à prouver que $non\ B \Rightarrow non\ A$.

Exemple :

Si n est un entier, montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Il est plus simple de démontrer la contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.

Démonstration par transitivité

Transmission d'une propriété par transitivité.

Exemple :

Les trois médiatrices d'un triangle ABC se coupent en un point unique.

Une médiatrice de AB est l'ensemble des points à égale distance de A et B. Une médiatrice de AC est l'ensemble des points à égale distance de A et C. Leur intersection est donc à égale distance de B et C, donc se situe sur la médiatrice de BC.

Démonstration par analogie

Mise à profit d'une similitude entre le problème à résoudre et un problème déjà résolu.

« Un bon mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes. Un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Mais le meilleur des mathématiciens est celui qui peut voir des analogies entre les analogies. » Stefan Banach (1892-1945)

Exemple :

Les trois médianes d'un triangle se coupent en un point unique.

Si on observe que pour chaque médiane, les deux triangles situés de part et d'autre de la médiane sont de surfaces égales, on perçoit l'analogie avec le problème du centre de gravité du triangle et de son unicité.

Principe des tiroirs

Utiliser le principe des tiroirs énoncé par Dirichlet (1805-1859) : « Si plus de p+1 chaussettes sont réparties dans p tiroirs, alors au moins un tiroir contient plus d'une chaussette ». Cette méthode de démonstration commence par identifier les tiroirs, respectivement les chaussettes.

Exemple 1 :

Montrer que, parmi cinq points à la surface d'une sphère, il existe un hémisphère fermé qui contient au moins quatre de ces points.

Prenons un grand cercle (coupant la sphère en deux hémisphères) passant par deux des cinq points. Il reste trois points répartis sur deux hémisphères, donc l'un des deux contient au moins deux points.

Exemple 2 :

Existe-t-il un multiple de 19 qui ne s'écrive qu'avec des 0 et des 1 ?

Utilisons les restes dans la division par 19 (les « chaussettes ») des nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 1 : 1, 11, 111, 1111, … (20 fois). Classons-les dans 19 tiroirs selon la valeur de leur reste. L'un des tiroirs contient au moins deux nombres. Leur différence est multiple de 19 et ne s'écrit qu'avec des 0 et des 1.

Analyse et synthèse

Le chemin déductif conduisant à la preuve n'est pas toujours direct. L'analyse consiste à construire la liste des propositions intermédiaires « à l'envers » par conditions suffisantes, permettant ainsi un enchaînement de déductions (synthèse) conduisant à la preuve.

Exemple :

Montrer que : $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab} \quad \forall a \geq 0$ et $\forall b \geq 0$

Il suffirait (propositions intermédiaires) :

que $(a+b)^2 \geq 4ab$

donc que $a^2+b^2+2ab \geq 4ab$

donc que $a^2+b^2-2ab \geq 0$

donc que $(a-b)^2 \geq 0$ ce qui est évident. Il reste à remonter par déductions successives.

Méthode de l'invariant

Utiliser une caractéristique invariante facilitant la démonstration.

Exemple :

Etudier les limites éventuelles des suites u_n et v_n telles que : $u_0 = a > v_0 = b$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Remarquons que $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$ (le produit des deux suites est un **invariant** valant ab)

donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{ab}{u_n})$ Il s'ensuit une analyse de suite classique qui conduit au résultat : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{ab}$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{ab}$

Démonstration par récurrence

Raisonnement visant à démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels. Il consiste à vérifier que la propriété est vraie pour le plus petit d'entre eux (a priori 0), puis à prouver que la véracité supposée de la propriété pour l'entier n l'implique pour n+1. La propriété est donc vraie pour tous les entiers naturels. Cette méthode fut utilisée, a priori la première fois, par Blaise Pascal (1623-1662)

Exemple :

$$\forall n > 0 \sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$$

Effectivement $1^3=1^2$

$$(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i + (n+1))^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 + (n+1)^2 + 2(n+1)(\sum_{i=1}^{n} i)$$

$$(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 + (n+1)^2 + n(n+1)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 + (n+1)^3$$

donc : $(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$ puisque la propriété est vraie pour n

donc : $(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^3$ elle est donc vraie pour n+1

Démonstration par récurrence transfinie

Généralisation de la récurrence classique à un ensemble E quelconque non vide, muni d'une fonction de choix (axiome de choix de Ernst Zermelo (1871-1953)), donc d'un ordre (même si E n'a pas de plus petit élément). Pour démontrer qu'une propriété *P(x)* est vraie $\forall x$ de *E,* la récurrence transfinie revient à démontrer que $\forall y < x \;\; P(y) \Rightarrow P(x)$.

Exemple :

Soit E un ensemble et F l'ensemble des parties de E muni de l'ordre : $A \leq B$ si $A \subset B$ et $\min A = \min B$. Montrer que F a un majorant.

Si $\forall A \leq B$ (éléments de F), A a un majorant, alors $(\bigcup_{A \leq B} A) = B$ a un majorant.

donc F a un élément maximal (E lui-même)

Induction rétrograde (retro-récurrence)

Soit *P(n)* une proposition définie sur les entiers naturels. Si *P(n)* est vraie pour une infinité d'entiers naturels, et si $\forall n \;\; P(n) \Rightarrow P(n-1)$, alors $\forall n \;\; P(n)$ est vraie. Cette méthode fut utilisée la première fois, par John von Neumann et Oskar Morgenstern en 1944.

Exemple :

$$\forall n > 0 \;\; a_1 a_2 ... a_n \leq (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n})^n$$

$$a_1 a_2 \leq (\frac{a_1 + a_2}{2})^2 - (\frac{a_1 - a_2}{2})^2 \leq (\frac{a_1 + a_2}{2})^2$$

donc $a_1 a_2 a_3 a_4 \leq (\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4})^4$

donc $\forall n = 2^m \;\; a_1 a_2 ... a_n \leq (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n})^n$ (une infinité de valeurs de n)

soit $U = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} \neq 0$

alors $\forall n = 2^m \;\; a_1 a_2 ... a_{n-1} U \leq (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + U}{n})^n = (\frac{(n-1)U + U}{n})^n = U^n$

donc $a_1 a_2 ... a_{n-1} \geq U^{n-1} = (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1})^{n-1}$ donc la proposition est vraie pour n-1

donc $a_1 a_2 ... a_n \leq (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n})^n$ est vraie $\forall n$

Démonstration par descente infinie

Cette méthode, formulée explicitement par Pierre de Fermat au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, part du constat qu'il n'existe pas de suite infinie décroissante d'entiers positifs. Elle peut en complément utiliser un raisonnement par l'absurde (exemple 1). Elle peut aussi s'appuyer sur la définition d'un ordre bien fondé (l'ordre inverse a une fin). Il est par exemple possible de s'inspirer de l'ordre lexicographique : $(a,b) <_{lex} (a',b') \Leftrightarrow (a < a'$ ou $(a = a'$ et $b < b'))$ (exemple 2).

Exemple 1 :

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

si $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel, alors $\exists(p,q)$ tels que $\sqrt{2} = p/q$ avec $0 < q < p < 2q$

comme $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ alors $\sqrt{2} = p/q = (2q-p)/(p-q)$ or $2q - p < p$ et $p - q < q$

ce qui amorce la descente infinie et conduit inéluctablement à une impossibilité.

Exemple 2 :

Une boîte contient des billes bleues et des billes rouges. On pioche des billes au hasard. Une bille piochée est jetée. Mais si celle-ci est rouge, un petit démon va remettre un nombre quelconque de billes bleues dans la boîte. Va-t-on réussir à vider la boîte ?

Le nombre n_B de billes bleues peut augmenter, le nombre n_R de billes rouges peut stagner. L'ordre bien fondé utilisé est l'ordre « lexical » (n_R, n_B) : quoi que l'on pioche, sa valeur diminue donc la boîte se vide.

Sources / *Fontoj*

Tangente n°55 / Les démonstrations / éd. Pôle

Logique et raisonnement de Michael Freund / éd. Ellipses

Tangente n°13 / L'infini / éd. Pôle

Tangente n°49 / Les maths de l'impossible / éd. Pôle

Wikipedia

Christian Rivière

3 avril 2021