Leonhard Euler (1707-1783) estas foje rigardata kiel la plej granda genio de la tuta historio. Ĉiukaze, pluraj intelektuloj de lia jarcento (ekzemple Condorcet) tion asertis senhezite. Se oni serĉas ekvivalenton en la du lastaj jarcentoj (cetere ĉu eblas kompari el du malsamaj epokoj ?), oni tuj pensas pri Evariste Galois (1811-1832) kiu, gimnaziano, legis kaj asimilis entute la verkojn de Joseph-Louis Lagrange kaj de … Leonhard Euler.

La kontribuoj de Euler rilatas al la analizo, la geometrio, la probabliko kaj etendiĝas eĉ ekster matematiko (fiziko, muziko, filozofio, …). Dotita per nekredeblaj memoro kaj intuicio, li publikigis siajn verkojn en tri lingvoj (la germana, la latina kaj la franca). Kiam Euler fariĝis blinda, li diktis siajn tekstojn al sia filo. Li praktikis ankaŭ la rusan kaj kapablis legi la anglan.

Li postlasis 74 volumojn je po 400 ĝis 600 paĝoj (29 estas dediĉitaj al la matematiko), sen kalkuli pri deko da volumoj eldonotaj pri lia abunda korespondado kun pluraj sciencistoj de sia epoko. Li donis sian nomon al cirklo, rekto, konstanto, nombro, diagramo, formulo, metodo, funkcio, rilato, indikilo, konjekto, kriterio, ekvacio, teoremo kaj al identaĵo.

Sed kion Euler malatentis ? Malmulton do ne estis facile elekti la ĉi-subajn temojn. Post ol eviti, pro praktikaj (grafikaj) kialoj, ĉion rilatantan al la geometrio (triangulo, pluredro, …) kaj al la kombinatoriko, mia elekto rilatas al kvar « fulmaĵoj » tipaj je la genio de Euler (apriore laŭ ordo de kreskanta malfacileco), en tiu senco ke ili estas la frukto de senlima intuicio kaj de konsiderinda aŭdaco. Eblas diri ke Euler ne ĉiam embarasis sin per la kutima rigoreco necesa koncerne la manipuladon de la termoj de nefiniaj serioj kaj de ties konverĝo.

Eksponencialo
Kompleksaj nombroj
Trigonometriaj funkcioj

Deirpunkto : $a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ...$ avec $(a^x)^2 = a^{2x}$

Do : $a^{2x} = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ...)^2 = A + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + ...$

Post la disvolvo de la kvadrato : $a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2!}x^2 + \frac{B^3}{3!}x^3 + \frac{B^4}{4!}x^4 + ...$

a kaj B estas ligitaj. Se $B = 1$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ (e : nombro de Euler ; $e \approx 2{,}718$)

Ĉi-okaze, oni konstatas ke : $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

Krome, oni ne konfuzu inter e (nombro de Euler), kaj la konstanto de Euler γ

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln(1+n)\right) \approx 0{,}57721$$

La trigonometrio instruas ke : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + i^2 \sin^2 x$

kaj ke : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$\cos 2x + i\sin 2x = \cos^2 x + 2i\sin x\cos x + i^2\sin^2 x = (\cos x + i\sin x)^2$$

do tio funkcias same kiel e^{ix} : $(e^{ix})^2 = e^{2ix}$

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ (formulo de Euler)

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + ... = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...)$$

De kio : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$ kaj $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

Ĉi-okaze, oni konstatas ke : $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$ kaj ke : $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$

Fine : $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ (identaĵo de Euler)

Radikoj ne nefini-grada polinomo
Skizo de la funkcio ξ
Eulera produto

$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ polinomo je nefinia grado kies radikoj estas : $k\pi$ kun $k \in Z$

Do : $\sin x = x.(1 - \frac{x^2}{\pi^2}).(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}).(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2})...$

parenteze Euler deduktas el tio :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - (\frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-\pi}) + (\frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x-2\pi}) - (\frac{1}{x+3\pi} + \frac{1}{x-3\pi}) + ...$$

kaj : $$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} + (\frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-\pi}) + (\frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x-2\pi}) + (\frac{1}{x+3\pi} + \frac{1}{x-3\pi}) + ...$$

Ni revenu al nia temo : $\frac{\sin x}{x} = 1-(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...)\frac{x^2}{\pi^2}+... = 1-(\sum_k \frac{1}{k^2})\frac{x^2}{\pi^2}+...$

Koeficiento de x^2 : $(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...)\frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{3!}$

De kio : $\boxed{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+... = \frac{\pi^2}{6} = \xi(2)}$ (estas notinde ke Euler intuiciis la funkcion ξ)

Same : $\frac{\sin x}{x} = 1-(\sum_k \frac{1}{k^2})\frac{x^2}{\pi^2}+(\sum_k \frac{1}{k^2}\sum_{k'>k}\frac{1}{k'^2})\frac{x^4}{\pi^4}...$

Koeficiento de x^4 : $(\sum_k \frac{1}{k^2}\sum_{k'>k}\frac{1}{k'^2})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{2}(\sum_k \frac{1}{k^2}\sum_{k'\neq k}\frac{1}{k'^2})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{5!}$

$$\frac{1}{2}(\sum_k \frac{1}{k^2}(\sum_{k'}\frac{1}{k'^2}-\frac{1}{k^2})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{2}(\sum_k \frac{1}{k^2}\sum_{k'}\frac{1}{k'^2}-\sum_k \frac{1}{k^4})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{2}(\frac{\pi^4}{6^2}-\sum_k \frac{1}{k^4})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{5!}$$

$$\frac{1}{36}-\frac{1}{\pi^4}\sum_k \frac{1}{k^4} = \frac{1}{60}$$

De kio : $\boxed{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+... = \frac{\pi^4}{90} = \xi(4)}$

Euler demonstris poste ke : $1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+... = \frac{\pi^6}{945} = \xi(6)$

kaj en 1744, la nekredeblan formulon: $1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+... = \frac{2^{24}.76977927\,.\pi^{26}}{27!} = \xi(26)$

Kaj nun, la jena problemo : *Ĉe du ajnaj pozitivaj entjeroj, kiomas la probableco* q *ke ili estas primaj inter si ?*

La divido per primo p donas p eblajn restaĵojn. Do la probableco ke almenaŭ unu el ambaŭ nombroj ne estas dividebla per p estas : $1-\frac{1}{p^2}$

Do : $q = \prod_{p\ primo}(1-\frac{1}{p^2})$ Eulera produto (kiun indicas la primoj)

De kio : $q = \prod_{p\ primo}(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+...)^{-1} = (1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...)^{-1}$ ĉar efektive ĉiuj eblaj obl-kombinoj de potencoj de primoj, bijektive donas ĉiujn entjerojn.

Rezulte : $q = \frac{1}{\xi(2)} = \frac{6}{\pi^2} > 0{,}5$ Do du entjeroj hazarde elektitaj estas pli ol duonprobable primaj inter si.

Ĝeneraligo de la eta teoremo de Fermat
Indika funkcio de Euler

Eta teoremo de Fermat : « se a kaj p estas primaj inter si do $a^{p-1} \equiv 1[p]$ »

Ĝeneraligo fare de Euler : « se a kaj p estas primaj inter si do $a^{\varphi(p)} \equiv 1[p]$ », en kiu $\varphi(p)$ estas la indika funkcio de Euler ($\varphi(p)$: nombro da entjeroj strikte malpli grandaj ol p kaj primaj kun p).

Kelkaj karakterizoj de la indika funkcio :

se p estas primo : $\varphi(p) = p - 1$

se p estas primo : $\varphi(p^2) = (p^2 - 1) - (p - 1) = p\varphi(p)$

se p estas primo : $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}\varphi(p)$

se a kaj b estas primaj inter si : $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

se la disigo de n en primoj estas : $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ tiam $\varphi(n) = n\prod_i \frac{p_i - 1}{p_i}$

Multaj aliaj formuloj kaj proprecoj estas troveblaj sur Wikipedia, kaj ne ĉiuj estis prezentitaj, eĉ malpli da estis demonstritaj de Euler mem. Sed la indika funkcio de Euler montriĝas ekstreme riĉa je konsekvencoj. Interalie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\xi(s-1)}{\xi(s)}$$ (en kiu ξ estas la funkcio jam elvokita ĉi-antaŭe)

La teoremo de Fermat-Euler (ĝeneraligita de Euler) estas la origino de la sistemo RSA (1977) de publik-koda kriptografio, kaj de la protokolo de sekurigo (SSL) de la plejmulto da Interretaj transakcioj.

Serioj de Goldbach

En 1738, Euler publicas *Variae observationes circa series infinitas.* Kelkaj juveloj :

$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$ evidente diverĝa, sed tion Euler spitas !

Se oni subtrahas la inversojn de la potencoj de 2, de 3, ne de 4 (jam subtrahitaj en la potencoj de 2), de 5, de 6, de 7, ne de 8 (jam subtrahitaj en la potencoj de 2), ne de 9 (jam subtrahitaj en la potencoj de 3), de 10, …, do respektive : 1, 1/2, 1/4, 1/5, 1/6, 1/9... (efektive $\sum_{n>1} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{m-1}$)

De x, restos 1 post subtraho de la cetero. Do :

$$x - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ...) = 1 = x - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + ...)$$

$$x - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + ... = x - (\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + ...)$$

$$\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + ... = \sum_{(m,n)} \frac{1}{m^n - 1} = 1}$$ (unua serio de Goldbach)

Ĉe $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ...$ evidente denove diverĝa, sed tion Euler plu ignoras !

Se oni subtrahas la inversojn de la potencoj de 2, ne de 4 (jam subtrahitaj en la potencoj de 2), de 6, ne de 8 (jam subtrahitaj en la potencoj de 2), de 10, de 12, de 14, ne de 16 (jam subtrahitaj en la potencoj de 2), de 18…, do respektive : 1, 1/5, 1/9, 1/11, 1/13, 1/17, 1/19 …

De *x*, restos 0 post subtraho de la cetero. Do :

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ...\right) = 0 = x - \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + ...\right)$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ... = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + ...$$

Ĉar $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ...$ kaj $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ...$

Do $x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + ... - \ln 2$

Do $0 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + ... - \ln 2 - \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + ...\right)$

$\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + ... = \sum_{(m \geq 2, n \geq 2)} \frac{1}{(2m-2)^n - 1} = \ln 2}$ (dua serio de Goldbach)

La sekvaj paĝoj de *Variae observationes* estas vera piroteknika spektaklo. Trideko da teoremoj, ĉiuj kuriozaj kaj mirigaj, esploras la mondon de la serioj kaj de la nefiniaj produtoj. Nura ekzemplo :

$$\frac{\prod_{p\ \text{primo}} p^n}{\prod_{p\ \text{primo}} (p^n - 1)} = \sum_{m>0} \frac{1}{m^n} = \xi(n) \text{ t.e. } \frac{2^n.3^n.5^n.7^n...}{(2-1)^n.(3-1)^n.(5-1)^n.(7-1)^n...} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + ...$$

Kiam *n* =1, la serio ne konverĝas, kio pruvas la nefiniecon de la primaro !!

Kromdonace, la formulo aperanta sur tiu ĉi poŝtmarko de Svisujo (emisiita la 6an de marto 2007a okaze de la tricentjariĝo de lia naskiĝo) : $e - k + f = 2$ (en Esperanto : $v - e + f = 2$) do la nombro de verticoj minus la nombro de eĝoj plus la nombro de facoj de pluredro nevarie valoras du.

Noto : fakte, la formulo estas vera por almenaŭ ĉiu konveksa pluredro.

Fontoj

Tangente n°29 / Leonhard Euler, un génie des Lumières *(L.Euler, genio de la Klerismo)* / éd. Pôle

Tangente n°13 / L'infini *(La nefinio)* / éd. Pôle

Christian Rivière

la 3an de aprilo 2021a