Leonhard Euler (1707-1783) est parfois considéré comme le plus grand génie de tous les temps. En tous cas, plusieurs intellectuels de son siècle l'affirmaient sans hésitation (Condorcet par exemple). Si on cherche un équivalent dans les deux derniers siècles (d'ailleurs la comparaison est-elle possible dans des époques différentes ?), on pense immédiatement à Evariste Galois (1811-1832) qui, lycéen, a lu et assimilé l'œuvre de Joseph-Louis Lagrange et de … Leonhard Euler.

Les contributions de Euler touchent l'analyse, la géométrie, le calcul de probabilités et s'étendent même au-delà des mathématiques (physique, musique, philosophie, …). Doté d'une mémoire et d'une intuition phénoménales, il a édité ses œuvres en trois langues (allemand, latin, français). Euler, devenu aveugle, dictait ses textes à son fils. Il pratiquait aussi le russe et lisait l'anglais.

Il a laissé derrière lui 74 volumes de 400 à 600 pages chacun (29 sont consacrés aux mathématiques), sans compter une dizaine de volumes en cours de parution pour son abondante correspondance avec divers scientifiques de son époque. Il a donné son nom à un cercle, une droite, une constante, un nombre, un diagramme, une formule, une méthode, une fonction, une relation, un indicateur, une conjecture, un critère, une équation, un théorème et une identité.

Mais qu'est-ce qui a échappé à Euler ? Peu de chose et il ne m'était pas facile de faire le choix ci-dessous. Après avoir évité, pour des raisons pratiques (graphiques), tout ce qui relève de la géométrie (triangle polyèdre, …) et de la combinatoire, mon choix porte sur quatre « fulgurances » typiques du génie de Euler (a priori dans l'ordre de difficulté croissante), en ce sens qu'elles sont le fruit d'une intuition sans limites et d'un sacré culot. Disons qu'Euler ne s'embarrassait pas toujours des nécessaires précautions de rigueur concernant la manipulation des termes des sommes infinies et leur convergence.

# Exponentielle
# Nombres complexes
# Fonctions trigonométriques

Point de départ : $a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ...$ avec $(a^x)^2 = a^{2x}$

Donc : $a^{2x} = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ...)^2 = A + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + ...$

Après développement du carré : $a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2!}x^2 + \frac{B^3}{3!}x^3 + \frac{B^4}{4!}x^4 + ...$

$a$ et $B$ sont liés. Si $B = 1$ : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ ($e$ : nombre d'Euler ; $e \approx 2{,}718$)

Au passage, on constate que : $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

D'autre part, il ne faut pas confondre $e$ (nombre d'Euler), avec la constante d'Euler $\gamma$

$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln(1+n)) \approx 0{,}57721$

La trigonométrie nous apprend : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + i^2 \sin^2 x$
et que : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x + i\sin 2x = \cos^2 x + 2i\sin x\cos x + i^2\sin^2 x = (\cos x + i\sin x)^2$

donc fonctionne comme $e^{ix}$ : $(e^{ix})^2 = e^{2ix}$

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$ (formule d'Euler)

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + ... = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...)$$

D'où : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$ et $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

Au passage, on constate que : $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$ et que : $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$

Enfin : $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ (identité d'Euler)

# Racines d'un polynôme de degré infini
# Esquisse de la fonction $\xi$
# Produit Eulérien

$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ polynôme de degré infini dont les racines sont : $k\pi$ avec $k \in Z$

Donc : $\sin x = x.(1 - \frac{x^2}{\pi^2}).(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}).(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2})...$

Euler en déduit : $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} - (\frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-\pi}) + (\frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x-2\pi}) - (\frac{1}{x+3\pi} + \frac{1}{x-3\pi}) + ...$

et : $\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} + (\frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-\pi}) + (\frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x-2\pi}) + (\frac{1}{x+3\pi} + \frac{1}{x-3\pi}) + ...$

Bref : $\dfrac{\sin x}{x} = 1-(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...)\dfrac{x^2}{\pi^2}+... = 1-(\sum_k \dfrac{1}{k^2})\dfrac{x^2}{\pi^2}+...$

Coefficient de $x^2$ : $(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...)\dfrac{1}{\pi^2} = \dfrac{1}{3!}$

D'où : $\boxed{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+... = \dfrac{\pi^2}{6} = \xi(2)}$ (au passage Euler a l'intuition de la fonction $\xi$ )

De même : $\dfrac{\sin x}{x} = 1-(\sum_k \dfrac{1}{k^2})\dfrac{x^2}{\pi^2}+(\sum_k \dfrac{1}{k^2}\sum_{k'>k}\dfrac{1}{k'^2})\dfrac{x^4}{\pi^4}...$

Coefficient de $x^4$ : $(\sum_k \dfrac{1}{k^2}\sum_{k'>k}\dfrac{1}{k'^2})\dfrac{1}{\pi^4} = \dfrac{1}{2}(\sum_k \dfrac{1}{k^2}\sum_{k'\neq k}\dfrac{1}{k'^2})\dfrac{1}{\pi^4} = \dfrac{1}{5!}$

$$\frac{1}{2}(\sum_k \frac{1}{k^2}(\sum_{k'}\frac{1}{k'^2}-\frac{1}{k^2})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{2}(\sum_k \frac{1}{k^2}\sum_{k'}\frac{1}{k'^2}-\sum_k\frac{1}{k^4})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{2}(\frac{\pi^4}{6^2}-\sum_k\frac{1}{k^4})\frac{1}{\pi^4} = \frac{1}{5!}$$

$$\frac{1}{36}-\frac{1}{\pi^4}\sum_k\frac{1}{k^4} = \frac{1}{60}$$

D'où : $\boxed{1+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}+... = \dfrac{\pi^4}{90} = \xi(4)}$

Euler démontre plus tard que : $1+\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{4^6}+... = \dfrac{\pi^6}{945} = \xi(6)$

puis en 1744, l'incroyable formule : $1+\dfrac{1}{2^{26}}+\dfrac{1}{3^{26}}+\dfrac{1}{4^{26}}+... = \dfrac{2^{24}.76977927\,.\pi^{26}}{27!} = \xi(26)$

Et maintenant, le problème suivant : *Soient deux nombres entiers positifs quelconques, quelle est la probabilité* q *qu'ils soient premiers entre eux ?*

La division par un nombre premier $p$ donne $p$ restes possibles. Donc la probabilité qu'au moins un des deux nombres ne soit pas divisible par $p$ est : $1-\dfrac{1}{p^2}$

Donc : $q = \prod_{p\ premier}(1-\dfrac{1}{p^2})$ produit Eulérien (dont les indices sont des nombres premiers)

D'où : $q = \prod_{p\ premier}(1+\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^4}+\dfrac{1}{p^6}+...)^{-1} = (1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...)^{-1}$ en effet tous les produits possibles de puissances de nombres premiers, donnent l'ensemble des nombres entiers de façon bijective.

Résultat : $q = \dfrac{1}{\xi(2)} = \dfrac{6}{\pi^2} > 0{,}5$ Donc, deux nombres entiers pris au hasard ont plus d'une chance sur deux d'être premiers entre eux.

# Généralisation du petit théorème de Fermat
# Fonction indicatrice d'Euler

Petit théorème de Fermat : « si $a$ et $p$ sont premiers entre eux alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$ »

Généralisation par Euler : « si $a$ et $p$ sont premiers entre eux alors $a^{\varphi(p)} \equiv 1[p]$ », où $\varphi(p)$ est la fonction indicatrice d'Euler (nombre d'entiers inférieurs à $p$ et premiers avec $p$).

Quelques caractéristiques de la fonction indicatrice :

si $p$ est premier : $\varphi(p) = p-1$

si $p$ est premier : $\varphi(p^2) = (p^2-1)-(p-1) = p\varphi(p)$

si $p$ est premier : $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}\varphi(p)$

si $a$ et $b$ premiers entre eux : $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

si la décomposition de $n$ en nombres premiers est : $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ alors $\varphi(n) = n\prod_i \frac{p_i - 1}{p_i}$

Beaucoup d'autres formules et propriétés sont mentionnées sur Wikipedia, et toutes n'ont pas été énoncées, et encore moins démontrées par Euler lui-même. Mais la fonction indicatrice d'Euler s'avère extrêmement riche de conséquences. En particulier :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\xi(s-1)}{\xi(s)}$$ (où $\xi$ est la fonction déjà évoquée dans ce document)

Le théorème de Fermat-Euler (généralisé par Euler) est à l'origine du système RSA (1977) de cryptographie à clé publique, et du protocole de sécurisation (SSL) de la plupart des transactions Internet.

# Séries de Goldbach

En 1738, Euler publie *Variae observationes circa series infinitas.* Quelques pépites :

Soit $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ évidemment divergente, mais cela n'arrête pas Euler !

Si on soustrait les inverses des puissances de 2, de 3, pas de 4 (déjà ôtés dans les puissances de 2), de 5, de 6, de 7, pas de 8 (déjà ôtés dans les puissances de 2), pas de 9 (déjà ôtés dans les puissances de 3), de 10, …, soit respectivement : 1, 1/2, 1/4, 1/5, 1/6, 1/9... En effet :

$$\sum_{n>1} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{m-1}$$

De $x$, il va rester 1 après avoir ôté tout le reste. Soit :

$$x - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots) = 1 = x - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \ldots)$$

$$x - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \ldots = x - (\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \ldots)$$

$$\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \ldots = \sum_{(m,n)} \frac{1}{m^n - 1} = 1}$$ (première série de Goldbach)

Soit $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ...$ évidemment divergente, mais cela n'arrête toujours pas Euler !

Si on soustrait les inverses des puissances de 2, pas de 4 (déjà ôtés dans les puissances de 2), de 6, pas de 8 (déjà ôtés dans les puissances de 2), de 10, de 12, de 14, pas de 16 (déjà ôtés dans les puissances de 2), de 18…, soit respectivement : 1, 1/5, 1/9, 1/11, 1/13, 1/17, 1/19 …

De $x$, il va rester 0 après avoir ôté tout le reste. Soit :

$$x - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ...) = 0 = x - (1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + ...)$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ... = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + ...$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ... \text{ et } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + ...$$

Donc $x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + ... - \ln 2$

Donc $0 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + ... - \ln 2 - (1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + ...)$

$$\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + ... = \sum_{(m \geq 2, n \geq 2)} \frac{1}{(2m-2)^n - 1} = \ln 2}$$ (seconde série de Goldbach)

La suite de *Variae observationes* est un véritable feu d'artifice. Une trentaine de théorèmes, tous curieux ou étonnants, explorent le monde des séries et des produits infinis. Un seul exemple :

$$\frac{\prod_{p\ premier} p^n}{\prod_{p\ premier} (p^n - 1)} = \sum_{m>0} \frac{1}{m^n} = \xi(n) \text{ soit } \frac{2^n.3^n.5^n.7^n...}{(2-1)^n.(3-1)^n.(5-1)^n.(7-1)^n...} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + ...$$

Quand $n = 1$, la série ne converge pas, ce qui prouve l'infinité des nombres premiers !!


En prime, la formule apparaissant sur ce timbre-poste de Suisse (émis le 6 mars 2007 pour le tricentenaire de sa naissance) : $e - k + f = 2$ (soit en français : $s - a + f = 2$) c'est-à-dire que le nombre de sommets moins le nombre d'arêtes plus le nombre de faces d'un polyèdre est invariablement égal à deux.

Nota : en fait, la formule est au moins vraie pour tout polyèdre convexe.

Sources

Tangente n°29 / Leonhard Euler, un génie des Lumières / éd. Pôle

Tangente n°13 / L'infini / éd. Pôle

Christian Rivière

23 avril 2021