Matematika rezonado

Rezonado

Ekzistas tri precipaj tipoj de rezono : la dedukto, la abdukto kaj la indukto. Ili esprimiĝas per uzo de tri elementoj : la kaŭzo, la efiko (implico) kaj la konsekvenco.

La ***dedukto*** *:*
se a *estas vera,*
kaj se « se a *estas vera do* b *estas vera » estas vera,*
do b *estas vera.*

La ***abdukto*** *:*
se b *estas vera,*
kaj se « se a *estas vera do* b *estas vera » estas vera,*
do a *estas vera.*

La ***indukto*** *:*
se a *estas vera,*
kaj se b *estas vera,*
do « se a *estas vera do* b *estas vera » estas vera.*

Rezono estas ***dedukta*** *se ĝi apogas sin sur dedukto ; ĝi estas* ***hipoteza*** *se ĝi apogas sin ĉu sur abdukto ĉu sur indukto.*

La dedukto ekiras de kaŭzoj certaj kaj efikoj demonstritaj kaj konkludas pri konsekvencoj certaj.

La abdukto serĉas verŝajnajn kaŭzojn de konstatitaj konsekvencoj, laŭ efikoj demonstritaj. La abdukto ne donas verajôn, sed hipotezon (pri kaŭzo) verŝajnan kies verecon oni kontrolu.

La indukto proponas efikojn probablajn inter kaŭzoj certaj kaj konsekvencoj atestitaj. La indukto ne donas verajôn, sed hipotezon probablan (pri efiko) kies verecon oni demonstru (almenaŭ statistike).

Principoj

La principo de ***ne-kontraŭdiro*** *postulas ke aserto kaj ĝia neo ne povas esti ambaŭ veraj.*
La principo de ***nurdueco*** *postulas ke aŭ aserto estas vera, aŭ ĝia neo estas vera. Ĝi malpermesas ke ili estu ambaŭ malveraj.*
La « regulo de la alternativo » (Robert Blanché) rezultas de la konjekto je la principo de ne-kontraŭdiro kaj de la principo de nurdueco. Kunefike,tiuj principoj kunfondas la koheran matematikan logikon, laŭnome la klasikan. La ***intuiciisma*** *logiko, siaflanke, ne inkludas la principon de nurdueco.*

Jen ekvivalentaj formuloj de nurdueco, el la plej konataj :

$ne\text{-}ne\text{-}p=p$	*Reciprokeco*
$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$	*Regulo de Pierce*
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (ne\, p \vee q)$	*Implico esprimita per apartigo*
$ne\ (ne\, p \wedge ne\ q) \Rightarrow (p \vee q)$	*Regulo de De Morgan*
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (ne\ q \Rightarrow ne\, p)$	*Retroimplico*

Skoloj

*La **platonisma** koncepto regis ĝis la XIX^a jarcento. Laŭ Platono, la perceptita mondo estas nur ŝajna. La vera mondo estas mondo de la ideoj kies esploron faciligas la matematikoj. La matematikaj objektoj estas realaj kaj matematikisto nur remalkovras ilin.*

*La **realismo** tiel asertas pri la sendependa ekzisto de matematikaj entoj, antaŭ nia kono pri ĝi : nombroj, figuroj, aroj, funkcioj, karaterizoj, ktp. Por realisto, matematikisto manipulas specifajn objektojn kiuj defias ties inteligenton. Koni ne signifas inventi, sed malkovri elementojn, operaciojn, funkciojn, metodojn de demonstrado. La plej imagiva matematikisto nur « trovas » solvojn laŭ objektoj kaj operacioj kiuj trudas siajn proprajn regulojn. La matematikaj propozicioj veraj esprimas esencajn propraĵojn de tiuj operacioj kaj objektoj. Ekzemple, laŭ tiu vidpunkto, la « teoremo de Fermat » estis vera antaŭ ol oni trovis ĝian demonstron.*

Meze de la XIX^a jarcento, la apero de geometrioj ne-Eŭklidaj ŝancelis tiun koncepton. Kelkaj matematikistoj, inter kiuj Cantor kaj Russell disvolvis la aro-teorion kaj la logikon, por establi firmajn, koherajn kaj nediskuteblajn fundamentojn.

*Sed la evidentigo de multnombraj paradoksoj esence propraj al la aro-teorio, kondukis al la disvolviĝo de la **formalismo** (Hilbert, Bourbaki) ĉirkaŭ la 30^{aj} jaroj. La matematiko fariĝis homa kaj ne plu dia faro. Ĝi ne prezentas abstraktan mondon kiun oni denove malkovras, sed aksiomaran lingvon elpensitan, kaj zorge elektitan por elimini paradoksojn. Tiu koncepto konkretiĝis en la 70^{aj} jaroj per la fama reformo de la « modernaj matematikoj ». Ĝi relative malproksimiĝis de la aliaj fakoj (fiziko) kaj rifuzis la intervenon de la intuicio.*

Sed Gödel demonstris en 1931 ke, iu ajn estas la deirpunkta aksiomaro de matematika teorio, tiu ĉi ĉiam enhavas nedecideblajn rezultojn (kiujn oni ne povas decidi ĉu kontraŭdiraj ĉu ne).

*La **intuiciismo** (Brouwer ĉirkaŭ 1920) situas inter realismo kaj formalismo. La matematiko estas nek abstrakta objekto (kiel opiniis la realistoj) nek aksiomara lingvo (kiel opiniis la formalistoj), sed sinsekvaj rezultoj ekhavataj de la matematikistoj. Ne ekzistas vero sen sperto de la vero. Same kiel la formalismo, ĝi eliminas la paradoksojn. Krome, ĝi forpuŝas la nocion de nefinio, tial ke nenio nefinia povas esti traktita en finia daŭro. Ĝi forpuŝas ankaŭ la principon de nurdueco. Konsekvencas la negado de granda parto de la rezultoj de la XIX^a jarcento, inkluzive de la teoremo de fiksita punkto de … Brouwer. Sed la intuiciismo estis populara ĉe la matematik-uzantoj, el kiuj la fizikistoj.*

*La **konstruivismo** estas sinteno rilate al la matematiko, kiu postulas ke eblas fakte demonstri la ekziston de matematikaj objektoj, nur proponante ties **konstruo**-metodojn. La konstruivismo estas minoritata skolo sine de la matematikistaro kaj la konstruiva matematiko estas multe malpli disvastigita ol la klasika.*

La konstruivismo ne rigardas universale valida la rezonon per absurdo, kaj opinias ke pruvo de ekzisto per absurdo (t.e. demonstro kiu deiras de la ne-ekzisto cele al implico de kontraŭdiro) ne principe kondukas al konstruo de la objekto.

Ekzemplo 1 :
Se oni deziras demonstri ke « Ekzistas neracionaloj a kaj b, tiaj ke a^b estas racionalo ». Ni rigardu la jenan demonstron :

> *Oni scias ke $\sqrt{2}$ estas neracionalo kaj ke 2 estas racionalo. Ni notu φ la aserton « $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ estas racionalo ». Ni apliku la nuduecan principon : aŭ φ estas vera aŭ φ estas malvera.*
>
> *se φ estas vera do la neracionaloj $\sqrt{2}$ kaj $\sqrt{2}$ taŭgas ;*
>
> *se φ estas malvera do la neracionaloj $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ kaj $\sqrt{2}$ taŭgas ĉar $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ kiu estas racionalo ».*

Tiu ĉi demonstro ne estas konstruiva. Efektive, pro sia uzo de la nurdueca principo, ĝi eksplicas neniun solvon, nur demonstras la ekziston de solvo-duopo, sed ne kapablas identigi la solvon (tial ke oni ne scias ĉu φ estas vera aŭ malvera).

Noto : Fakte, φ estas malvera ĉar laŭ la teoremo de Gelfond-Schneider, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ eĉ estas transcenda.

Ekzemplo 2 :

Oni celas demonstri ke $]0;1[$ *kaj* $[0;1]$ *estas ekvipotencaj, do ke ekzistas bijekcion inter tiuj du kontinuaj aroj. Ni konsideru la efektive bijekcian funkcion f :*

$f(1/2) = 0$ *kaj* $f(1/3) = 1$

se x havas la formon 1/n por n >3 : $f(x) = 1/(n-2)$

se x ne havas la formon 1/n : $f(x) = x$

Tiu demonstro ĉar proponanta solvon, estas konstruiva, dum pruvo ke ekzistas injekciojn ambaŭsence (kio estus sufiĉa por demonstri la ekvipotencon), ne konstituus konstruivan demonstron, ĉar ne proponante solvon.

Precipaj nocioj

Aksiomo

Difino :

Fundamenta aserto, el kiu oni eliras por pruvi teoremojn. (PIV 2.)

Komento :

Aksiomo utilas por esprimi bazan aserton, sine de teorio. La tuto de la aksiomoj difinantaj la teorion nomiĝas ***aksiomaro*** *aŭ aksiomara teorio. Tiu aksiomaro estu ne kontraŭdira.*

Ekzemplo :

La kvin aksiomoj de Peano por difini la naturajn nombrojn :

La elemento nomata nul kaj notita 0 *estas natura nombro.*

Ĉiu natura nombro n *havas nur unu sekvanton, notitan* s(n) *ou* S_n *kiu estas natura nombro.*

0 *estas sekvanto de neniu natura nombro.*

Du naturaj nombroj kun la sama sekvanto estas egalaj.

Se aro de naturaj nombroj entenas kaj 0 *kaj la sekvanton de ĉiu el siaj elementoj, tiam tiu aro estas* **N**.

Postulato

Difino :

Tezo, pri kiu oni postulas pro la bezono de la demonstrado, ke ĝi estu akceptata kiel vera, kvankam ne demonstrita. (PIV)

Ekzemploj :

« Tra du punktoj pasas ununura rekto. » « Plano entenas entute la rekton pasantan tra du el ĝiaj punktoj. »

« Rekto estas la plej malgranda distanco de iu punkto ĝis alia. »

Konjekto

Difino :

Io supozata sed ne certa opinio, konkludo aŭ klarigo. (laŭ PIV)

Komento :

Konjekto povas fariĝi teoremo post demonstro (teoremo de Fermat : « Ne ekzistas entjeroj strikte pozitivaj x, y *kaj* z *tiaj ke :* $x^n+y^n=z^n$ *ekde kiam* n *estas entjero strikte pli granda ol* 2 *»), plu resti konjekto pro manko de akceptebla demonstro (konjekto de Goldbach : « Ĉiu para entjero pli granda ol* 3 *estas sumo de du primoj »), aŭ malaperi post malkovro de kontraŭ-ekzemplo (konjekto de Euler : « Por ĉiu entjero* n *strikte pli granda ol* 2*, la sumo de* n –1 n*-aj potencoj ne estas* n*-a potenco. Nu,* $27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$ *»)*

Hipotezo

Difino :

Nepruvita supozo, provizore akceptita kadre de demonstrado de teoremo.

Komento :

Hipotezo estas helpo kadre de pripenso aŭ de demonstro. Diversspecaj situacioj sin prezentas : 1. serĉo de kaŭzo (abdukto), kies vereco en la kunteksto plu restas pruvenda ; 2. sinsekva konsidero de la kazoj de decid-arbo por sinsekva trakto (ĉiukaza trakto) ; 3. supozo ke pruvenda propozicio estas malvera, por dedukti evidentan malveraĵon, tiel pruvante la malverecon de la hipotezo, do la verecon de la propozicio (demonstrado per absurdo). 4. provizora limigo de la valoraro de variablo koncernata de teoremo, cele al specifa demonstro sine de la sub-aro (apartigo de la kazoj) ; 5. supozo ke elemento de sinsekvo havas proprecon, antaŭ dedukto ke la sekvanta elemento estas same karakterizata (rikuro).

Lemo

Difino :

Aserto kiu estas helpa survoje al pli ĉefa aserto. (PIV)

Ekzemplo :

Lemo de Euclide : « Jen b *kaj* c *du entjeroj. Se primo* p *dividas la produton* bc*, do* p *dividas* b *aŭ* c *». El tiu demonstreblas pluraj konataj teoremoj, ekzemple pri la ununureco de la nereduktebla formo de frakcio.*

Teoremo

Difino :

Tre grava aserto en matematika teorio. (PIV)

Korolario

Difino :

Aserto, en matematika teorio, kiu relative facile sekvas el teoremo aŭ propozicio. (PIV)

Paradokso

Difino :

Kontraŭdiro, al kiu kondukas en iaj okazoj abstrakta rezono. (PIV)

Komento :

Estas necese distingi inter la semantika paradokso (« Mi mensogas ») ofte kaŭzata de lingva memreferenco (metalingvo), kaj la logika paradokso ofte ligita al la manipulado de la nefinio aŭ al problemo de aparteno (aro-teorio). Nur la dua interesas nin ĉi tie.

Ekzemplo :

Paradokso de John Littlewood : pilkoj numeritaj 1, 2, 3, … estas metitaj en urnon laŭ la jena proceduro : minuton antaŭ nokto-mezo la pilkoj 1 ĝis 10 estas metitaj kaj la pilko 1 formetita ; duonon de minuto antaŭ nokto-mezo la pilkoj 11 ĝis 20 estas metitaj kaj la pilko 2 formetita ; trionon de minuto antaŭ nokto-mezo la pilkoj 21 ĝis 30 estas metitaj kaj la pilko 3 formetita, ktp. La nombro de pilkoj en la urno strebas al nefinio kiam t *strebas al noktomezo, sed ĝi estas nula je noktomezo.*

Nedecideblaĵo

Difino :

Propozicio estas nedecidebla en specifa teorio se tiu ĉi povas demonstri nek la propozicion, nek ties malon (logika nedecideblo), aŭ se ne estas eble trovi ĝeneralan algoritmon kiu ebligas decidon en finia tempo (algoritma nedecideblo).

Ekzemplo :

Ĉu eblas trovi ĝeneralan algoritmon kiu ebligas decidon pri : ĉu iu ajn polinoma ekvacio kun entjeraj koeficientoj havas entjerajn solvojn ? En 1970, Youri Matiiassevitch demonstris ke tia algoritmo ne ekzistas.

Formulado

*Sintakse, kunekzistas la konstituantoj utilaj por identigi aŭ por nomi elementojn de la problemo (**variabloj**, **konstantoj**, **termoj**) kaj la konstituantoj utilaj por esprimi proprecojn aŭ rilatojn inter tiuj elementoj (**predikatoj** aŭ **formuloj**). Kiam predikato koncernas unu elementon, tiam ĝi esprimas **proprecon**, kaj kiam ĝi koncernas du aŭ plurajn elementojn, tiam ĝi esprimas **rilaton**.*

Estas uzataj :

. variabloj reprezentantaj elementojn de la problemo ;
. predikatoj (aŭ rilatoj) pri (inter) la elementoj ;
. logikaj konektiloj (kaj, aŭ, implicas, ks.) ;
. du kvantizantoj, unu universala (« kiu ajn », « por ĉiu » notita ∀) kaj unu ekzista (« ekzistas almenaŭ unu », notita ∃).

Noto : estus eble uzi nur unu kvantizanton ∀ kaj nur du logikajn konektilojn, nome ne *kaj* kaj*. Ekzemple «* ∃x P(x) *» estas difinita kiel «* ne (∀x ne P(x)) *».*

x+1 *estas termo*
0+1+1 *estas termo izolita*
x<y+1 *estas formulo (predikato)*
0+1+1<0+1+1+1 *estas izolita formulo.*

Kiam variablo apartenas al sub-formulo antaŭata de kvantizanto, ∀x *aŭ* ∃x*, ĝi estas **ligita de tiu ĉi kvantizanto**. Se variablo estas ligita al neniu kvantizanto, ĝi estas **libera**. Oni nomas **problem-eldiro** formulon (aŭ formul-sistemon) kies variabloj estas ĉiuj ligitaj per kvantizantoj (do kiu ne havas liberan variablon).*

La distingo inter libera variablo kaj ligita variablo estas grava. Ligita variablo ne havas propran identecon kaj povas esti anstataŭigita per iu ajn nomo de variablo kiu ne aperas en la formulo. Tiel, ∃x x<y *estas identa al* ∃z z<y *sed ne al* ∃x x<z *kaj eĉ malpli al* ∃*y y*<*y*+1 (evidentaĵo) *aŭ* ∃*y y*<*y* (stultaĵo).

***Izolita formulo** estas formulo kies variabloj estas ĉiuj ligitaj. **Predikato** estas formulo kiu entenas unu aŭ plurajn liberajn variablojn. Predikato estas speco de koncepto. Tiel,* ∀x ∃y x<y *estas izolita formulo de aritmetiko.* ∀x x<z *estas predikato pri la variablo z.*

Demonstrado

Logika dedukto

Ĝi estas la plej simpla demonstro-metodo.

Ekzemplo :

se $A \subset B$ *kaj* $B \subset C$ *do* $A \subset C$

Apartigo de la kazoj

Sinsekvaj traktoj de pluraj apartaj kazoj, eventuale per malsamaj metodoj.

Ekzemplo :

Demonstri ke $P_n=n(n+1)(2n+1)$ *estas oblo de 3 :*

se $n \equiv 0[3]$ *do* $P_n \equiv 0[3]$

se $n \equiv 1[3]$ *do* $2n+1 \equiv 0[3]$ *do* $P_n \equiv 0[3]$

se $n \equiv 2[3]$ *do* $n+1 \equiv 0[3]$ *do* $P_n \equiv 0[3]$

Demonstrado per kontraŭ-ekzemplo

Por demonstri ke propozicio estas vera (ke ĝia malo estas vera), sufiĉas evidentigi kontraŭ-ekzemplon.

Ekzemplo :

Derivebla funkcio havas kontinuan derivaĵon.

Kontraŭ-ekzemplo : $f(x) = x^2.\sin(1/x)$ *se* $x \neq 0$ *kaj* $f(0) = 0$

$f'(x) = 2x.\sin(1/x) - \cos(1/x)$ *ne havas limeson kiam* x *strebas al* 0, *kvankam f estas derivebla kaj* $f'(0) = 0$

Demonstrado per absurdo

Metodo laŭ kiu la propozicio estas supozata malvera, do ke ĝia malo estas vera, kaj el tio dedukti absurdaĵon. Ĉi mala propozicio do ne povas esti vera (io vera povas implici nur ion veran), ĝi do estas malvera kaj la demonstrenda propozicio estas vera.

Ekzemplo :

Demonstri ke $\sqrt{2}$ *ne estas racionala nombro :*

se $\sqrt{2}$ *estus racionala nombro, do* $\exists(p,q)$ *, primaj inter si, tiaj ke* $\sqrt{2} = p/q$

do $p^2 = 2q^2$ *kaj per disigo laŭ primoj, 2 aperus parnombrajn fojojn en la maldekstra termo kaj neparnombrajn fojojn en la dekstra termo, kio estus absurda.*

Metodo per ĉiukaza trakto

Por demonstri rezulton tian kia X=Y, oni rezonas dufoje per absurdo por forĵeti sinsekve ambaŭ neegalaĵojn X >Y kaj X < Y. Tiu metodo estas atribuita al Euxode de Cnide (408aK 355 aK).

Ekzemplo :

Demonstri ke la rilatumo de la surfacoj de du diskoj D *kaj* D' *egalas la rilatumon de la kvadrato de iliaj diametroj* d *kaj* d'. *(Propozicio 2 de la libro XII de la Elementoj de Euclide)*

Oni supozas ke $D / D' > d^2 / d'^2$.

Oni konstruas du similajn poligonojn P *kaj* P' *enskribitajn en la diskoj, tiaj ke* $P / D' > d^2 / d'^2$

Sciante ke $P / P' = d^2 / d'^2$ *do* $D / D' > P / D' > d^2 / d'^2$ *do* $P / D' > P / P'$ *do* $D' < P'$ *kio estas absurda.*

Oni procedas analoge pri la inversa neegalaĵo $D / D' < d^2 / d'^2$.

Oni konstruas du similajn poligonojn P *kaj* P' *enskribitajn en la diskoj, tiaj ke* $D / P' < d^2 / d'^2$

Sciante ke $P / P' = d^2 / d'^2$ *do* $D / D' < D / P' < d^2 / d'^2$ *do* $D / P' < P / P'$ *do* $D < P$ *kio estas absurda.*

Demonstrado per kontraŭ-propozicio

Pruvi ke $A \Rightarrow B$ *identas kun pruvi ke* $ne\ B \Rightarrow ne\ A$.

Ekzemplo :

Se n *estas entjero, demonstri ke se* n^2 *estas para, do* n *estas para.*

Estas pli simple demonstri la kontraŭ-propozicion : se n *estas nepara, do* n^2 *estas nepara.*

Demonstrado per transitiveco

Transdono de propreco per transitiveco.

Ekzemplo :

La tri mezortantoj de triangulo kruciĝas laŭ ununura punkto.

Mezortanto de AB *estas la aro de punktoj same distancaj de* A *kiel de* B. *Mezortanto de* AC *estas la aro de punktoj same distancaj de* A *kiel de* C. *Ilia intersekco situas egaldistance de* B *kaj de* C, *do situas sur la mezortanto de* BC.

Demonstrado per analogeco

Profiti de simileco inter la solvenda problemo kaj jam solvita problemo.

« Bona matematikisto estas tiu kiu povas trovi analogecon inter teoremoj. Pli bona matematikisto estas tiu kiu povas vidi analogecon inter demonstradoj. Sed la plej bona matematikisto estas tiu kiu povas vidi analogecon inter analogaĵoj. » Stefan Banach (1892-1945)

Ekzemplo :

La tri medianoj de triangulo kruciĝas laŭ ununura punkto.

Se oni observas ke pri ĉiu mediano, la du trianguloj situantaj ambaŭflanke de la mediano estas samsurfacaj, oni ekvidas la analogecon kun la problemo de la gravito-centro de la triangulo kaj de ĝia ununureco.

Procedo per tirkestoj

Uzi la procedon de la tirkestoj, eldiritan de Dirichlet (1805-1859) : « Se pli ol p+1 *ŝtrumpetoj estas dismetitaj en* p *tirkestoj, do almenaŭ unu tirkesto entenas pli ol unu ŝtrumpeton ». Tiu demonstro-metodo komenciĝas per identigo de la tirkestoj, respektive de la ŝtrumpetoj.*

Ekzemplo 1 :

Demonstru ke, el kvin punktoj sur la surfaco de sfero, ekzistas hemisfero entenanta almenaŭ kvar el tiuj punktoj.

Oni elektu grandan cirklon (kiu disigas la sferon laŭ du hemisferoj) pasantan je du el la kvin punktoj. Restas tri punktoj situantaj sur du hemisferoj, do sur unu el ambaŭ troviĝas almenaŭ du punktoj.

Ekzemplo 2 :

Ĉu ekzistas oblo de 19 kiu skribiĝas per nur 0 kaj 1 ?

Oni uzu la restojn de la divido per 19 (la « ŝtrumpetoj ») de nombroj kiuj skribiĝas nur per 1 : 1, 11, 111, 1111, … (20 fojojn). Oni metu ilin en 19 tirkestojn laŭ la valoro de ilia resto. Unu el tiuj tirkestoj entenas almenaŭ du nombrojn. Ilia diferenco estas oblo de 19 kaj skribiĝas nur per 0 kaj 1.

Analizo kaj sintezo

La dedukta vojo al la pruvo ne ĉiam estas unupaŝa. La analizo konsistas en la listigo de la interaj propozicioj laŭ « inversa ordo » per sufiĉaj kondiĉoj, tiel ebligante sinsekvan kunefikon de deduktoj (sintezo laŭ dedukta ordo) konduke al la pruvo.

Ekzemplo :

Demonstru ke : $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab} \quad \forall a \geq 0$ *et* $\forall b \geq 0$

Sufiĉus (interaj propozicioj) :

ke $(a+b)^2 \geq 4ab$

do ke $a^2+b^2+2ab \geq 4ab$

do ke $a^2+b^2-2ab \geq 0$

do ke $(a-b)^2 \geq 0$ *kio estas evidenta. Restas dedukti malsupre-supren.*

Metodo de la invarianto

Uzi invariantan karaterizon por faciligi la demonstradon.

Ekzemplo :

Pristudi la eventualajn limesojn de la vicoj u_n *et* v_n *tiaj ke :* $u_0 = a > v_0 = b$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Oni rimarku ke $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$ *(la produto de ambaŭ vicoj estas* ***invarianto*** *valoranta* ab*)*

do $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{ab}{u_n})$ *Sekvas klasika privica analizo kiu kondukas al la rezulto :*

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{ab}$ *kaj* $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{ab}$

Rikura demonstrado

Rezono celanta demonstri proprecon je ĉiuj entjeroj. Oni unue kontrolas ke la propreco estas vera je la plej malgranda (apriore 0), kaj oni pruvas ke la vereco supozata de la propreco je la entjero n *implicas ĝin je* n+1. *La propreco do estas vera je ĉiuj entjeroj. Tiu metodo estis uzata, apriore unuan fojon, de Blaise Pascal (1623-1662).*

Ekzemplo :

$$\forall n > 0 \sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$$

Efektive $1^3=1^2$

$$(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i + (n+1))^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 + (n+1)^2 + 2(n+1)(\sum_{i=1}^{n} i)$$

$$(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 + (n+1)^2 + n(n+1)^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 + (n+1)^3$$

Do : $(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$ *ĉar la propreco estas vera je* n

Do : $(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^3$ *ĝi do estas vera je* n+1

Demonstrado per transfinia rikuro

Ĝeneraligo de la klasika rikuro al ajna aro E *ne malplena, dotita de elekto-funkcio (post akcepto de la « aksiomo de bona elekto » de Ernst Zermelo (1871-1953)), do de ordo (eĉ se* E *ne havas infimon). Por demonstri ke propreco P(x) estas vera* $\forall x$ *de* E*, la transfinia rikuro konsistas en pruvo ke* $\forall y < x \;\; P(y) \Rightarrow P(x)$

Ekzemplo :

E *estas aro kaj* F *la aro de la partoj de* E *dotita per la ordo :* $A \leq B$ *se* $A \subset B$ *kaj* $\min A = \min B$

Demonstru ke F *havas maksimumon.*

Se $\forall A \leq B$ *(elementoj de* F*), A havas maksimumon, do* $(\bigcup_{A \leq B} A) = B$ *havas maksimumon.*

*do F havas supremon (*E *mem)*

Retro-rikuro (aŭ Retro-indukto)

Ĉe P(n) propozicio difinita pri entjeroj. Se P(n) estas vera por nefinio da entjeroj, kaj se $\forall n \;\; P(n) \Rightarrow P(n-1)$*, do* $\forall n \;\; P(n)$ *estas vera. Tiu metodo estis uzata unuan fojon de John von Neumann kaj de Oskar Morgenstern en 1944.*

Ekzemplo :

Oni demonstru ke $\forall n > 0 \;\; a_1 a_2 \ldots a_n \leq (\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n})^n$

$$a_1 a_2 \leq (\frac{a_1+a_2}{2})^2 - (\frac{a_1-a_2}{2})^2 \leq (\frac{a_1+a_2}{2})^2$$

do $a_1 a_2 a_3 a_4 \leq (\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4})^4$

do $\forall n = 2^m \;\; a_1 a_2 \ldots a_n \leq (\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n})^n$ *(nefinio da valoroj de n)*

ĉe $U = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \neq 0$

do $\forall n = 2^m \;\; a_1 a_2 \ldots a_{n-1} U \leq (\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+U}{n})^n = (\frac{(n-1)U+U}{n})^n = U^n$

do $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \geq U^{n-1} = (\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1})^{n-1}$ *do la propozicio estas vera por n-1*

do $a_1 a_2 \ldots a_n \leq (\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n})^n$ *estas vera* $\forall n$

Demonstrado per nefinia malpliigo

Tiu metodo eksplicita de Pierre de Fermat en la XVIIa jarcento, ekiras de la fakto ke ne ekzistas nefinia malpliiĝanta vico de pozitivaj entjeroj. Ĝi povas, komplemente uzi rezonadon per absurdo (ekzemplo 1). Ĝi ankaŭ povas sin apogi sur difino de kunsojla ordo (kies inversa ordo havas finon). Eblas inspiriĝi ekzemple per la leksika ordo : $(a,b) <_{leks} (a',b') \Leftrightarrow (a < a' \text{ aŭ } (a = a' \text{ kaj } b < b'))$. *(ekzemplo 2)*

Ekzemplo 1 :

Demonstru ke $\sqrt{2}$ *estas neracionala.*

se $\sqrt{2}$ *estus racionala, do* $\exists(p,q)$ *tiaj ke* $\sqrt{2} = p/q$ *kun* $0 < q < p < 2q$

ĉar $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ *do* $\sqrt{2} = p/q = (2q-p)/(p-q)$

nu : $2q - p < p$ *kaj* $p - q < q$ *kio ekkondukas al nefinia malpliigo, do neeviteble al neeblaĵo.*

Ekzemplo 2 :

Skatolo entenas bluajn kaj ruĝajn pilketojn. Oni deprenas pilketojn hazarde. Deprenita pilketo estas forĵetita. Sed se tiu ĉi estas ruĝa, demoneto remetas ajnan nombron da bluaj pilketoj en la skatolon. Ĉu oni sukcesos malplenigi la skatolon ?

La nombro n_B *da bluaj pilketoj povas pliiĝi, la nombro* n_R *da ruĝaj pilketoj povas stagni. La kunsojla ordo uzata estas la « leksika » ordo* (n_R, n_B) *: kiu ajn estas la rezulto de la depreno, ĝia valoro malgrandiĝas do la skatolo fariĝos malplena.*

Fontoj

Tangente n°55 / Les démonstrations / éd. Pôle

Logique et raisonnement de Michael Freund / éd. Ellipses

Tangente n°13 / L’infini / éd. Pôle

Tangente n°49 / Les maths de l’impossible / éd. Pôle

Wikipedia

Christian Rivière

la 3[an] de aprilo 2021[a]