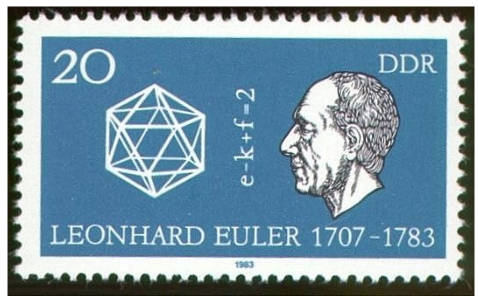
La formulo de Euler



La sama formulo estas videbla sur poŝtmarko de Svisujo, eldonita la 6-an de marto 2007-a okaze de la tricentjariĝo de la naskiĝo de Leonhard Euler, kaj sur poŝtmarko de Orienta Germanujo, eldonita la 6-an de septembro 1983-a okaze de la ducentjariĝo de lia forpaso.

Ĝi asertas ke $e-k+f=2$ (en Esperanto : $v-e+f=2$) t.e. la nombro de verticoj minus la nombro de eĝoj plus la nombro de facoj (edroj) de pluredro ĉiam valoras du.

Noto : fakte, la formulo estas vera por ĉiu konveksa pluredro.

Ĉu la formulo de Euler : $v-e+f=2$ estas ĝeneraligebla al aliaj dimensioj ? Unuapaŝe, oni observu objektojn kun malpli granda dimensio ol tri, uzante la notacion a_i , t.e. la nombro de elementoj en la dimensio *i.*

Pri punkto : $a_0 = 1$	unu punkto, sed neniu elemento en supera dimensio
Pri segmento : $a_0 - a_1 = 1$	du ekstremoj, unu segmento ($2-1=1$)
Pri plurlatero : $a_0 - a_1 + a_2 = 1$	*n* verticoj, *n* lateroj, unu faco ($n-n+1=1$)
Pri pluredro : $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1$	formulo de Euler por unu volumeno ($a_3 = 1$)

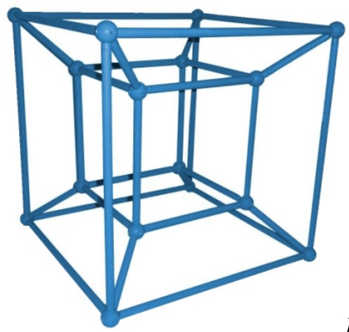
Henri Poincaré demonstris ke por konveksa pluredro en ajna dimensio *n*, $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i = 1$ estas vera, evidente kun $a_n = 1$ (ĉar la konvekseco implicas la koneksecon)

Ĉar $\forall i > n,\ a_i = 0$, do por ĉiu konveksa pluredro en ajna dimensio : $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i = 1}$

Kompreneble, la formulo estas ĝeneraligebla al hipervolumo el *k* konveksaj pluredroj (ne nepre samdimensiaj) sed ne koneksaj : $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i = k$

Noto : la konvekseco estas kondiĉo sufiĉa, sed ne necesa. Male, la formulo ne estus aplikebla por formoj pli kompleksaj, ekzemple kun « truoj ».

Por « pluredro » en dimensio 4, kiel konkretigi $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 1$?



figuro 1

La 4-dimensia hiperkubo, nomata teserakto[NPIV](koordinatoj *xyzw*) estas prezentebla en ebeno (2-dimensia) sub perspektiva formo 3-dimensia, kiel montras la bildo (*figuro 1*). Ekzistas aliaj manieroj pli naturaj prezenti teserakton (per simpla duobliga translacio de kubo). Tamen, tiu prezento faciligas la nombradon de la 3-dimensiaj kuboj kiel vidote. La origino situas ĉe la centro de la bildo sed la kvara akso ne estas prezentebla. Ĝia koordinato *w* estas proporcia al la eĝo de la kubo ĉe la bildo, tiel ke la malgranda kubo de la bildo estas pli proksima al la origino ol la granda (reale same grandaj). Kompreneble, oni ne konfuzu la longecon de eĝo de la 3-dimensia kubo de la bildo kun la reala longeco de la eĝoj de la teserakto. En ekstrema situacio, 3-dimensia kubo centrita ĉe la origino (ĝia 4-a koordinato *w*=0) estus laŭvide reduktita al kvazaŭ-punkto.

Kiel sciate, kvadrato estas duobligebla en tria dimensio por fariĝi kubo, tiel ke ambaŭ kvadratoj estas ligitaj per kvar kromaj eĝoj kaj kvar edroj. Sammaniere, kubo estas duobligebla en kvara dimensio por formi teserakton (kun latero *c*), ambaŭ kuboj estas ligitaj per dek du eĝoj, dek du edroj kaj ses kuboj. La ok (du plus ses) kuboj estas la du kuboj el la duobligado (ambaŭ en la klasika koordinataro *xyz*, ĉe du koordinatoj de la kvara dimensio, respektive w_1 kaj w_2) plus la ses interspacoj (vidu la *figuron 1*) inter la edroj de tiuj du kuboj (du estas en koordinataro *wxy* ĉe du koordinatoj z_1 kaj z_2, same du paroj de kuboj respektive en *wxz* kaj *wyz*).

Ni konstruu la teserakton laŭ du etapoj. Ni unue aldonu punkton (*) (en la kvara dimensio) al la kubo ($a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 8 - 12 + 6 - 1 = 1$) por fari hiperpiramidon (hiperkonuson) :

$$(a_0 + 1) - (a_1 + 8) + (a_2 + 12) - (a_3 + 6) + 1 = 1 \quad \text{do :}$$
$$(8 + 1) - (12 + 8) + (6 + 12) - (1 + 6) + 1 = 1$$

Ekde tiu situacio ($a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 9 - 20 + 18 - 7 + 1 = 1$), se la punkto refariĝas kubo paralela al la unua (hipercilindro) :

$$(a_0 - 1 + 8) - (a_1 + 12) + (a_2 + 6) - (a_3 + 1) + a_4 = 1 \quad \text{do :}$$
$$(9 - 1 + 8) - (20 + 12) + (18 + 6) - (7 + 1) + 1 = 1$$

Ni faru same pri hiper-kvaredro (**). Ni unue aldonu punkton (*) (en la kvara dimensio) al la kvaredro ($a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$) por fari hiper-kvaredron (hiperkonuson) :

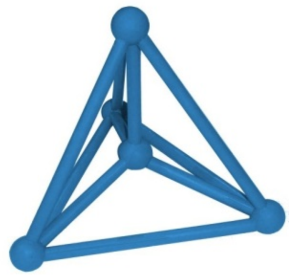
$$(a_0 + 1) - (a_1 + 4) + (a_2 + 6) - (a_3 + 4) + 1 = 1 \quad \text{do :}$$
$$(4 + 1) - (6 + 4) + (4 + 6) - (1 + 4) + 1 = 1$$

Ekde tiu situacio ($a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 5 - 10 + 10 - 5 + 1 = 1$), se la punkto refariĝas kvaredro paralela al la unua (hipercilindro) :

$$(a_0 - 1 + 4) - (a_1 + 6) + (a_2 + 4) - (a_3 + 1) + a_4 = 1 \quad \text{do :}$$
$$(5 - 1 + 4) - (10 + 6) + (10 + 4) - (5 + 1) + 1 = 1$$

(*) : por fari hiperkonuson, ja necesas vera punkto, ne kubo prezentita per nura punkto tial ke ĝi estus centrita ĉe la origino.

(**) : nur tridimensia hiper-kvaredro havas kvar edrojn. Dudimensia havas unu edron (triangulo), kvardimensia havas dek edrojn (*figuro 2*), kvindimensia havas dudek edrojn, sesdimensia kavas tridek kvin edrojn …



figuro 2

Simplekso estas hiper-kvaredro (aŭ pli simple hipertriangulo) kies verticoj situas sur ĉiu akso plus la origino. En spaco de dimensio n, la simplekso estas do n-dimensia kun $n+1$ verticoj.

Pri segmento : $2-1=1$

Pri triangulo : $3-3+1=1$

Pri kvaredro : $4-6+4-1=1$

Pri hiper-kvaredro : $5-10+10-5+1=1$ same kiel jam vidite (*figuro 2*)

Koncerne la superajn dimensiojn, estas evidente ke $a_i = C_{n+1}^{i+1}$. Efektive, ĉiu elemento en la dimensio i estas ligita al $i+1$ elementoj de la sama dimensio el inter $n+1$.

Rezulte : $\boxed{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_{n+1}^{i+1} = 1}$

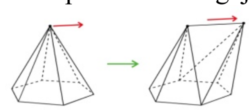
Oni do retrovas konatan formulon koncerne la liniojn de la triangulo de Pascal ! Ĉar evidente :

$$(1-1)^{n+1} = 0 = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^{i} = 1 - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_{n+1}^{i+1}$$

La formulo de Euler estas do pruvita por ĉiu hiper-kvaredro. Por ĝeneraligi al ĉiu konveksa pluredro en ajna dimensio n (sen senti devigon prezenti la demonstradon de Henri Poincaré), sufiĉas deiri de hiper-kvaredro en dimensio n kaj alporti sinsekvajn modifojn, kiel aldoni la kroman verticon aŭ eĝon « tiritan » de la surfaco al la ekstero, aŭ « platigi » verticon aŭ eĝon.

Sen certigi pri esploro de ĉiuj ebloj, sep kazoj estas prezentitaj ĉi-poste. Les ilustraĵoj prezentas tridimensiajn pluredrojn, sed la modifoj povas esti farataj ĉe ajna dimensio :

1. la nova vertico estas duobligaĵo de vertico deirpunkto de a eĝoj :



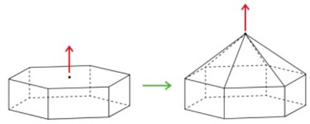
a_0 pliiĝas je 1

a_1 pliiĝas je 1 + 2

a_2 pliiĝas je 2 (cetere la dispartigo de la a eĝoj laŭ la du verticoj ne intervenas)

La bilanco estas nula : 1 – 3 + 2 = 0

2. la nova vertico estas tirita de edro kun v verticoj :



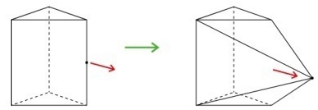
a_0 pliiĝas je 1

a_1 pliiĝas je v

a_2 pliiĝas je v – 1 (la deirpunkta edro malaperas)

La bilanco estas nula : 1– v + (v – 1) = 0

3. la nova vertico estas tirita de eĝo inter du edroj kun respektive v_1 kaj v_2 verticoj. Ĝi estas tirita restante sur la ebeno de unu el la du edroj (ekz. la malantaŭa-dekstra sur la figuro) :



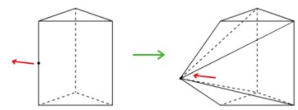
a_0 pliiĝas je 1

a_1 pliiĝas je $v_2 - 1$ (1 deirpunkta eĝo malaperas)

a_2 pliiĝas je $(v_2 - 1) - 1$ (la grandigita edro jam ekzistis ; la alia deirpunkta edro malaperas)

La bilanco estas nula : $1 - (v_2 - 1) + (v_2 - 2) = 0$

4. la nova vertico estas tirita de eĝo inter du edroj kun respektive v_1 kaj v_2 verticoj :



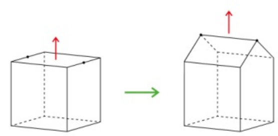
a_0 pliiĝas je 1

a_1 pliiĝas je $v_1 + v_2 - 2 - 1$ (2 verticoj estas komunaj al la 2 edroj ; krome 1 deirpunkta eĝo malaperas)

a_2 pliiĝas je $v_1 + v_2 - 2 - 2$ (2 verticoj komunaj al la 2 edroj ; la 2 deirpunktaj edroj malaperas)

La bilanco estas nula : $1 - (v_1 + v_2 - 3) + (v_1 + v_2 - 4) = 0$

5. nova eĝo est tirita. Ĝiaj ekstremoj devenas de du eĝoj de la sama edro, kaj restas en la ebenoj de la respektivaj aliaj edroj kiujn limigas tiuj du eĝoj :



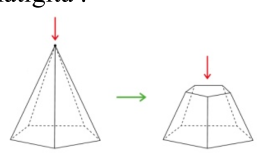
a_0 pliiĝas je 2

a_1 pliiĝas je 1 + 2 (la du eĝoj estas rompitaj)

a_2 pliiĝas je 2 – 1 (1 edro malaperas)

La bilanco estas nula : $2 - (1 + 2) + (2 - 1) = 0$

6. vertico de kiu deirpunktas a eĝoj estas platigita :



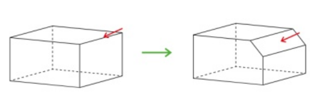
a_0 pliiĝas je $a - 1$ (1 vertico malaperas)

a_1 pliiĝas je a

a_2 pliiĝas je 1

La bilanco estas nula : $a - 1 - a + 1 = 0$

7. eĝo kies ekstremoj estas verticoj de kiuj deirpunktas de respektive a_1 kaj a_2 eĝoj (sur la figuro $a_1 = a_2 = 3$), estas platigita :



a_0 pliiĝas je $a_1 + a_2 - 2 - 2$ (2 deirpunktaj verticoj ne estu enkalkulitaj, cetere malaperas)

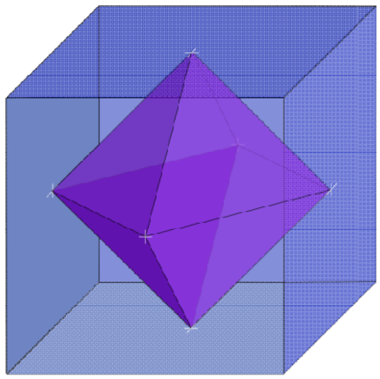
a_1 pliiĝas je $a_1 + a_2 - 2 - 1$ (2 eĝoj estas komunaj ; 1 eĝo malaperas)

a_2 pliiĝas je 1

La bilanco estas nula : $(a_1 + a_2 - 4) - (a_1 + a_2 - 3) + 1 = 0$

Alispeca manipulado estas farebla, kiu konsistas en inversigo de la koeficientoj a_i kun sama signo en la formulo de Euler. Ekzemple la nombroj de verticoj kaj de edroj, kiel sur la *figuro 3* ĉi-sube pri la kubo. Oni tie faras pluredron dualan de la kubo (primala[NPIV] pluredro). Sufiĉas elekti centrajn punktojn de ĉiu edro. Tiuj fariĝas la verticoj de la duala pluredro. Ĉiu el tiuj verticoj estas la komunaĵo de tiom da edroj, kiom la origina edro de la kubo havas da verticoj.

La dualo de kubo estas la okedro kaj reciproke. La dualo de kvaredro estas kvaredro (*figuro 3*).

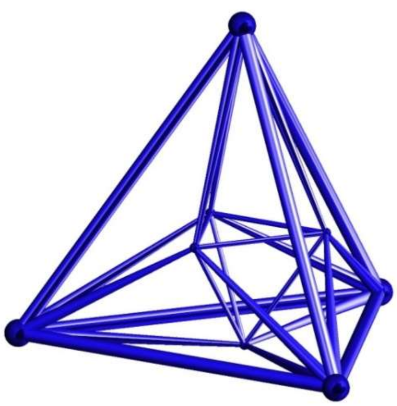


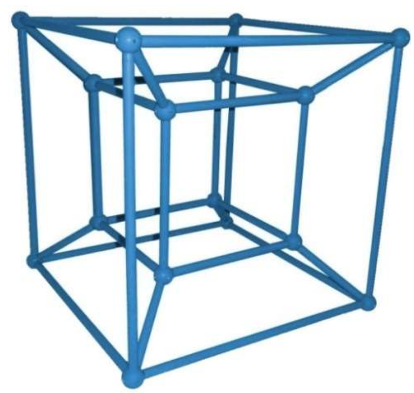
Kubo : 8 verticoj, 12 eĝoj, 6 edroj
Okedro : 6 verticoj, 12 eĝoj, 8 edroj

figuro 3

La dualo de tetraedro estas tetraedro (4 verticoj, 6 eĝoj, 4 edroj). La dualo de ikosaedro / dudekedro (12 verticoj, 30 eĝoj, 20 edroj) estas dodekaedro / dekduedro (20 verticoj, 30 eĝoj, 12 edroj) kaj reciproke.

Ekde la dimensio 4 (kaj nepre ĉe la paraj dimensioj n), estas preferinde klarigi la dualigon kiel inversigon de la $n-1$ unuaj koeficientoj a_i. Tiel la ordo $a_0 \ldots a_k \ldots a_{n-1}$ fariĝas $a_{n-1} \ldots a_{n-k-1} \ldots a_0$ kaj la duala hiper-pluredro de la teserakto estas la **deksesĉelo**.

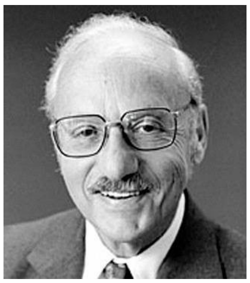




Deksesĉelo (maldekstre) : 8 verticoj, 24 eĝoj, 32 edroj, 16 ĉeloj (2+4+4+6=16)
Teserakto (dekstre) : 16 verticoj, 32 eĝoj, 24 edroj, 8 ĉeloj

Ni rimarku ke la formulo de Euler ambaŭkaze plu valoras :
$16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 8 - 24 + 32 - 16 + 1 = 1$ (fu !)

La dualeco-nocio retroviĝas en la tekniko de solvado de problemoj nomata *Lineara Programado*, konata sub la nomo « *algoritmo de la simplekso* » (eĉ se la esplorita pluredro ne estas propravorte simplekso), kaj enkondukita de la matematikisto George Dantzig ekde 1947. La problemo prezentiĝas sub formo de sinsekvo de trudoj (trudaj valoroj maksimumaj aŭ minimumaj), kaj ĉiu el ili lineare ligas la variablojn de la problemo (la vorto simplekso rekongruas kun sia difino kiam oni realdonas variablojn *de diferenco* por transformi la neegalecojn en egalecojn, t.e. ke oni iras de la kanonika formo al la laŭnorma). La trudoj reprezentas hiperebenojn de pluredro kies verticoj respondas al la variabloj de la problemo. Krome, lineara kombinado de la variabloj estu maksimuma (aŭ minimuma), kio estas la *kosto-funkcio*, kiu respondas al hiperebeno sendependa de la pluredro. La solvo troviĝas do sur iu vertico de la pluredro. La algoritmo migradas laŭ la eĝoj de la pluredro laŭ ordo plej efika por atingi rapide la solvon. Tio estas la *primala problemo*.


George Dantzig (1914-2005)

Transformante la variablojn de la primala problemo en trudojn kaj reciproke (do la verticojn en hiperebenojn kaj reciproke), oni generas la *dualan problemon* kiu donas la saman optimuman valoron de la kosto-funkcio !

La solvilo (la algoritmo solvanta la problemon) povas propravole pritrakti jen la primalan problemon, jen la dualan.

Estas notinde ke, anstataŭigo de la neegalecoj per egalecoj (laŭnorma formo), la dimensioj de la problemoj primala kaj duala estas identaj. Malgraŭŝajne, estas same pri la nombro de trudoj post enkalkulo de la variabloj de diferenco (ekzemple ties pozitiveco).

Praktike, tiuspecaj problemoj povas uzi tre grandan nombron de variabloj, de kelkaj dekoj ĝis kelkaj miloj kaj eĉ pli, kio estas la dimensio de la problemo ! L.Euler estus revanta pri tio.

Christian Rivière
la 2-an de julio 2023-a

Sincerajn dankojn al :

Serge Sire kiu konkretigis la teserakton (*figuro 1*) kaj la hiper-kvaredron (*figuro 2*).

Mélodie Pradeau kiu plenumis la desegnojn pri la manipulado de pluredroj.

Problemoj primala kaj duala, sama rezulto

Oni imagu ke entrepreno E_1 fabrikas n produktojn P_i (en lineara programado, estas kutimo ke la variabloj estu majusklaj) kaj la profito de produkto-unuo i estas b_i . Por fabriki tiujn produktojn, la entrepreno uzas m materialojn j, kies totala kvanto disponebla estas q_j. Por ĉiu produkto-unuo i, necesas kvanto a_{ij} de la materialo j. Por E_1, maksimumi sian profiton estas solvi :

$\max\ b^T P$	primala problemo
$aP \leq q$	kanonika formo
$P \geq 0$	trudoj de limigo

Ekzemple (n = 3 kaj m = 2) :

$\max\ (\ 300\,€.P_1 + 400\,€.P_2 + 600\,€.P_3)$	primala problemo (maksimuma profito)
$4P_1 + 3P_2 + 5P_3 \leq 59$	trudo 1 (laŭ la disponeblo)
$8P_1 + 7P_2 + P_3 \leq 87$	trudo 2
$P_1 \geq 0\ ; P_2 \geq 0\ ; P_3 \geq 0$	trudoj de limigo

Entrepreno E_2 proponas reaĉeton de krud-materialoj por sia propra produktado. La interkonsento okazas kiam E_1 neniom malgajnas vendante siajn krud-materialojn anstataŭ vendi siajn produktojn. E_2 volas pagi kiel eble malplej. Se Y_j estas la prezo proponita de E_2 al E_1 por la produkto-unuo j :

$\min\ q^T Y$	duala problemo
$A^T Y \geq b$	kanonika formo
$Y \geq 0$	trudoj de limigo

En la ekzemplo (n = 3 kaj m = 2) :

$\min\ (59Y_1 + 87Y_2)$	duala problemo (E_2 ne volas pagi tro)
$4Y_1 + 8Y_2 \geq 300$ €	trudo 1 (E_1 ne volas malgajni)
$3Y_1 + 7Y_2 \geq 400$ €	trudo 2
$5Y_1 + Y_2 \geq 600$ €	trudo 3
$Y_1 \geq 0\ ; Y_2 \geq 0$	trudoj de limigo

Optimuma rezulto de la primalo : P_1=0, P_2=11,75 kaj P_3=4,75. Kosto-funkcio ĉe la optimumo : 300 P_1+400 P_2+600 P_3=7550 €

Optimuma rezulto de la dualo : Y_1=118,75 € et Y_2=6,25 €. Kosto-funkcio ĉe la optimumo : 59 Y_1+87 Y_2=7550 €

Ambaŭ kosto-funkcioj estas egalaj ĉe la optimumo, kaj nur ĉe la optimumo. Alikaze la kosto-funkcio de la primalo estas malplia ol tiu de la dualo (ĉar la primalo serĉas maksimumon, male ĝi estus plia). Efektive : $b^T P \leq (a^T Y)^T P = Y^T aP \leq Y^T q$ (la unua neegaleco venas de la dualo, la dua de la primalo)

Noto : la demonstrado ne uzas la kosto-kunkciojn, sed ne pruvas la egalecon ĉe la optimumo, kio cetere estus iom pli longa.

La dualo de la duala problemo estas la primala problemo. Tiu ŝajna reciprokeco inter la primalo kaj la dualo, lasas onin opinii ke ĉia intertraktado ebligas kompromison. Nu, nur la intereso de E_1 est enkalkulita. Krome, la primala problemo, kiu ignoras la entreprenon E_2, povas solviĝi izole kaj provizas mem la optimumon. Pri la dualo, ĝi ebligas neniun intertraktadon : E_2 reaĉetas tion kion E_1 bonvolas revendi. Ve !

La formulo de Euler por trovi regulajn pluredroj

Jen regula pluredro kies edroj estas n egallateraj trianguloj. La nombro de verticoj estas notita s. Oni do havas (laŭ la formulo de Euler) : $s-\frac{3n}{2}+n-1=1$ Cetere eblas uzi la teoremon de angul-deficito : $s(\frac{360°}{60°}-\frac{3n}{s})60°=720°$ por ekhavi la saman rezulton : $\boxed{2s=n+4}$.

Krome la nombro de anguloj ĉe vertico $k=\frac{3n}{s}$ estas 3, 4 aŭ 5. ($k>2$ kaj $k.60°<360°$)

Estas do tri regulaj pluredroj kies edroj estas trianguloj :

. la tetraedro: $s=4$ kaj $n=4$ $\quad 4-6+4-1=1$

. la okedro : $s=6$ kaj $n=8$ $\quad 6-12+8-1=1$

. la ikosaedro : $s=12$ kaj $n=20$ $\quad 12-30+20-1=1$

Sammaniere se la regula pluredro havas n kvadratajn edrojn : $s-\frac{4n}{2}+n-1=1$. Same per la teoremo de angul-deficito : $s(\frac{360°}{90°}-\frac{4n}{s})90°=720°$ Do : $\boxed{2s=2n+4}$

Krome la nombro de anguloj ĉe vertico $k=\frac{4n}{s}$ valoras ekskluzive 3.

Ekzistas do nur unu regula pluredro kies edroj estas kvadratoj :

. la kubo : $s=8$ kaj $n=6$ $\quad 8-12+6-1=1$

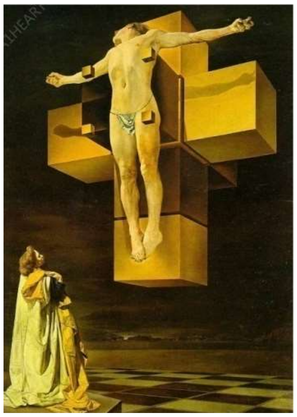
Se la regula pluredro havas havas n kvinlaterajn edrojn : $s-\frac{5n}{2}+n-1=1$ Per la teoremo de angul-deficito : $s(\frac{360°}{108°}-\frac{5n}{s})108°=720°$ Do : $\boxed{2s=3n+4}$.

Krome la nombro de anguloj ĉe vertico $k=\frac{5n}{s}$ valoras ekskluzive 3.

Ekzistas do nur unu regula pluredro kies edroj estas kvinlateroj :

. la dodekaedro / dekduedro : $s=20$ kaj $n=12$ $\quad 20-30+12-1=1$

Ekzistas do kvin regulaj pluredroj : la tetraedro duala je si mem, la kubo kun sia dualo la okedro, la ikosaedro kun sia dualo la dodekaedro.



La ŝablono de teserakto

La ŝablono 2-D de kubo 3-D estas kruco-forma kun ses kvadratoj (la edroj de kubo), kiel studite ĉe la elementa lernado. En la tabulo de Salvador Dali (*Corpus hypercubus*, 1954), la krucon reprezentas ŝablono de hiperkubo 4-D (teserakto), kun kompreneble ok kuboj 3-D, ses por formi dikan krucon, plus du aliaj, unu antaŭa, unu malantaŭa. Pro la unua la dorso estas iomete kurbigita.

Estas notinde ke pro emo aldoni dimension, Dali eĉ simbole anstataŭigis la najlojn (1-D) per platetoj (2-D) ĉirkaŭ la brusto !!

Pli konciza franclingva versio de la ĉi-antaŭa artikolo ricevis

la premion Tangente 2023 de la plej bona artikolo.

Simpleksoj kaj hiperkuboj

Kiuj estas la pluredroj kies elementoj estas determineblaj per rikuro de la punkto (dimensio nul) ĝis ajna dimensio ? Tri simplaj manipuladoj estas proponeblaj por iri de la dimensio d al d+1 :

1. duoblige sendi unu el la verticoj al la kroma dimensio

La parametroj a_{id} de la simpleksoj de dimensio d :

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
punkto	1	1						
segmento	1	2	1					
triangulo	1	3	3	1				
tetraedro	1	4	6	4	1			
kvinĉelo	1	5	10	10	5	1		
5-simplekso	1	6	15	20	15	6	1	
6-simplekso	1	7	21	35	35	21	7	1

konstruo : $a_{id}=a_{i\,d-1}+a_{i-1\,d-1}$ (triangulo de Pascal) $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_{id}=1$ (formulo de Euler)

$\sum_{i=-1}^{\infty} a_{id} = 2^{d+1}$ kaj la a_{id} uzataj kiel ciferoj donas la potencojn de 11 (121, 1331, 14641, 161051,…).

La sumoj laŭ la diagonaloj donas la vicon de Fibonacci ($u_n = u_{n-1}+u_{n-2}$) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … La divido de du sinsekvaj membroj limesas al la ora nombro kiam n strebas al la nefinio.

2. kloni la pluredron paralele al la kroma dimensio

La a_{id} de la hiperkuboj de dimensio d :

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
punkto	0	1						
segmento	0	2	1					
kvadrato	0	4	4	1				
kubo	0	8	12	6	1			
teserakto	0	16	32	24	8	1		
kubo 5D	0	32	80	80	40	10	1	
kubo 6D	0	64	192	240	160	60	12	1

konstruo : $a_{id}=2a_{i\,d-1}+a_{i-1\,d-1}$ $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_{id}=1$ (formulo de Euler)

$\sum_{i=0}^{\infty} a_{id} = 3^d = (1+2)^d = \sum_{i=0}^{d} C_d^i 2^{d-i}$ (do la sumo de samliniaj valoroj)

kaj la a_{id} uzataj kiel ciferoj donas la potencojn de 21 (441, 9261, 194481,…).

La sumoj laŭ la diagonaloj donas la vicon de Pell ($u_n = 2u_{n-1}+u_{n-2}$) : 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169,… La divido de du sinsekvaj membroj limesas al la arĝenta nombro $= (1+\sqrt{2})$ kiam n strebas al la nefinio.

3. kloni la pluredron paralele al la kroma dimensio kaj konsideri ĝian dualon

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
punkto	1						
segmento	2	1					
kvadrato	4	4	1				
okedro	6	12	8	1			
deksesĉelo	8	24	32	16	1		
5D	10	40	80	80	32	1	
6D	12	60	160	240	192	64	1

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_{id} = 1 \text{ (formulo de Euler)}$$

La sumoj laŭ la diagonaloj donas la vicon : 1, 2, 5, 10, 21, 42, 85,… , t.e. la indicojn de la Gros-Gray-kodoj entenantaj nur la ciferon 1.

La du ĉi-antaŭaj operacioj, unue T tia ke $a_{i\,d+1} = a_{i\,d} + a_{i-1\,d}$ kaj $a_{-1\,d} = 1$, due T' tia ke $a_{i\,d+1} = 2a_{i\,d} + a_{i-1\,d}$ kaj $a_{-1\,d} = 0$, estas aplikeblaj ne nur al la simpleksoj, respektive al la hiperkuboj, sed al ĉiu ajn politopo de dimensio d por krei politopon de dimensio d+1.

Jen P_d politopo de dimensio d.

T (P_d) estas konuso (aŭ piramido) kun bazo P_d kaj kun vertico s en la nova dimensio.
T'(P_d) estas cilindro (aŭ prismo) kies du bazoj P_d havas malsamajn koordinatojn en la nova dimensio.

Ekzemple :

T (punkto) = T (1) = (2, 1) = segmento
T (segmento) = T (2, 1) = (3, 3, 1) = triangulo
T (oklatero) = T (8, 8, 1) = (9, 16, 9, 1) = 3D-piramido kun oklatera bazo
T (kubo) = T (8, 12, 6, 1) = (9, 20, 18, 7, 1) = 4D-piramido kun kuba bazo
T (okedro) = T (6, 12, 8, 1) = (7, 18, 20, 9, 1) = 4D-piramido kun okedra bazo

noto : T (kubo) estas la dualo de T (okedro)

T' (punkto) = T' (1) = (2, 1) = segmento
T' (segmento) = T' (2, 1) = (4, 4, 1) = kvadrato
T' (oklatero) = T' (8, 8, 1) = (16, 24, 10, 1) = 3D-cilindro kun oklateraj bazoj
T' (kvaredro) = T' (4, 6, 4, 1) = (8, 16, 14, 6, 1) = 4D-cilindro kun kvaredraj bazoj
T' (okedro) = T' (6, 12, 8, 1) = (12, 30, 28, 10, 1) = 4D-cilindro kun okedraj bazoj

noto : oni konfuzu inter nek T (okedro), nek T' (okedro) kun la 4D-okedro nomata deksesĉelo (8, 24, 32, 16, 1) = dualo (teserakto) = dualo (T' (kubo)) = dualo (T' (dualo (okedro)))

Indikilo de komplekseco de la pluredroj

Set $\chi = \log_2 \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i}$ (vidu antaŭe por koni la signifon de la a_i).

Iom ajn estas la dimensio de la spaco, la valoro de χ estas minimuma por la plej simpla de la pluredroj : la simplekso. Ĉikaze, χ egalas la dimension de la spaco mem. Por punkto : $\chi = \log_2 1 = 0$ Por segmento : $\chi = \log_2 2 = 1$ Por triangulo : $\chi = \log_2(3+1) = 2$ Por tetraedro : $\chi = \log_2(4+4) = 3$ Por 4D-simplekso : $\chi = \log_2(5+10+1) = 4$ kpt. (la triangulo de Pascal estas valora helpo).

Sed χ havas ankaŭ alian utilan karakteron (simpleksoj estas apartaj kazoj pri tio) : du ajnaj pluredroj, unu duala de la alia, havas la saman valoron de χ .

Kubo kaj okedro : $\chi = \log_2(8+6) = \log_2(6+8) = 3{,}81$
Ikosaedro kaj dodekaedro : $\chi = \log_2(12+20) = \log_2(20+12) = 5$

Simplekso 4-D : $\chi = \log_2(5+10+1) = 4$
Teserakto kaj deksesĉelo : $\chi = \log_2(16+24+1) = \log_2(8+32+1) = 5{,}35$

La operatoro *T* grandigas la inkdikilon je unu.

Oklatero : $\chi = \log_2 9$	*T* (oklatero) : $\chi = \log_2 18$
Kubo : $\chi = \log_2 14$	*T* (kubo) : $\chi = \log_2 28$
Teserakto : $\chi = \log_2 41$	*T* (teserakto) : $\chi = \log_2 82$

La operatoro *T’* grandigas la inkdikilon je valoro rapide proksima al $\log_2 3$.

Deklatero : $\chi = \log_2 11$	*T’* (deklatero) : $\chi = \log_2(33-1)$
Kvaredro : $\chi = \log_2 8$	*T’* (kvaredro) : $\chi = \log_2(24-1)$
Okedro : $\chi = \log_2 14$	*T’* (okedro) : $\chi = \log_2(42-1)$
Deksesĉelo : $\chi = \log_2 41$	*T’* (deksesĉelo) : $\chi = \log_2(123-1)$

Matrica formulado :

Unue, la kolumna matrico (la vorto « vektoro » estus ne ĝusta) reprezentanta konveksan politopon en la dimensio d difiniĝas jene :

. la unua informo koncernas la dimension « -1 » (kun $a_{-1} = a_d$). Temas pri rezervo de punkto, uzebla de T por aldoni dimension :

. se la maksimuma dimensio prezentebla estas d, la nombro de linioj de la matrico estas $d + 2$;

. ĉiu politopo en malsupera dimensio (de -1 ĝis d), estas prezentebla (ekz : kvadrato 2-D estas aparta kazo de politopo 4-D) ;

. provizore, a_d valoras 1 ;

. la formulo de Euler estas vera sub la formo : $\sum_{i=-1}^{\infty} (-1)^i a_i = 0$

Ĉi-sube en dimensio $d = 4$:

La operatoroj T kaj T' (agas sur ajna politopo de dimensio $d' < d$) :

$$T : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T' : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La operatoro $Dual_k$ (agas sur ajna politopo de dimensio $k < d + 1$) :

$$Dual_d : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Dual_{d-1} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Dual_{d-2} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$