



Les triangles « c(a+b)d », « ach » et « hdb » sont des triangles rectangles semblables.

Cette simple figure peut être utilisée en cours de mathématique au collège pour illustrer le théorème de Pythagore, puis le théorème de Thalès, mais séparément. Les quelques lignes suivantes montrent que ces deux théorèmes sont équivalents.

Note : ni Pythagore (approx. -580 / -495 av. J.-C.) ni Thalès (approx. -620 / -545 av. J.-C.) ne sont à l'origine des théorèmes portant leurs noms. Ils n'ont d'ailleurs laissé aucuns écrits de leurs cogitations. Et puis ces théorèmes étaient connus des babyloniens plus d'un millénaire avant eux.

Pythagore \Rightarrow Thalès

Pythagore : $c^2 = a^2 + h^2$ $d^2 = b^2 + h^2$ $(a+b)^2 = c^2 + d^2$

$(a+b)^2 = c^2 + d^2 = (a^2 + h^2) + (b^2 + h^2)$

Or : $(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$

Donc : $ab = h^2$ d'où $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$

De plus : $\frac{c}{d} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \sqrt{\frac{(1 + h^2/a^2)a^2}{b^2 + h^2}} = \sqrt{\frac{(h^2 + h^4/a^2)a^2}{(b^2 + h^2)h^2}} = \frac{a}{h}$

$\boxed{\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{c}{d}}$ (Thalès)

$c^2 = a^2 + h^2$ $d^2 = b^2 + h^2$

$c^2 = a^2 + ab$ $d^2 = b^2 + ab$ donc : $\frac{a}{c} = \frac{c}{a+b}$ et $\frac{b}{d} = \frac{d}{a+b}$

$c^2 = \frac{h^4}{b^2} + h^2$ $d^2 = \frac{h^4}{a^2} + h^2$

$b^2c^2 = h^2(h^2 + b^2) = h^2d^2$ et $a^2d^2 = h^2(h^2 + a^2) = h^2c^2$ donc : $\frac{b}{d} = \frac{h}{c}$ et $\frac{a}{c} = \frac{h}{d}$

$\boxed{\frac{h}{c} = \frac{b}{d} = \frac{d}{a+b}}$ et $\boxed{\frac{a}{c} = \frac{h}{d} = \frac{c}{a+b}}$ (Thalès)

Thalès \Rightarrow Pythagore

$$\text{Thalès : } \frac{a}{c} = \frac{h}{d} = \frac{c}{a+b} \quad \frac{b}{d} = \frac{h}{c} = \frac{d}{a+b} \quad \Rightarrow a+b = \frac{c^2}{a} = \frac{d^2}{b} = \frac{cd}{h}$$

$$\text{Comme } (a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b) = a \cdot \frac{c^2}{a} + b \cdot \frac{d^2}{b}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = c^2 + d^2} \text{ (Pythagore)}$$

$$a+b = \frac{cd}{h}$$

$$(a+b)^2 = \frac{c^2 d^2}{h^2} = c^2 + d^2$$

$$c^2 d^2 = c^2 h^2 + d^2 h^2$$

$$\text{Donc : } c^2 = \frac{c^2 h^2}{d^2} + h^2 \quad \text{et} \quad d^2 = h^2 + \frac{d^2 h^2}{c^2}$$

$$\text{Soit : } \boxed{c^2 = a^2 + h^2} \quad \text{et} \quad \boxed{d^2 = h^2 + b^2} \text{ (Pythagore)}$$

C. Rivière
05 avril 2023