Kolekto de logikaj program-pecoj

por la

Lineara Programado per Entjeraj Nombroj

Christian Rivière

Lineara programado per entjeroj

Uzi solvilon kaj teknikon de lineara programado ne ĉiam estas la plej adekvata metodo por solvi problemon kiu koncernas nur entjerajn variablojn, des malpli kiam tiuj variabloj estas binaraj. Tamen, multaj problemoj de lineara programado necesigas lokan uzon de diskretaj, entjeraj aŭ eĉ binaraj variabloj (kondiĉo, aro, ordo, listo, arbo, ...). Kvankam facile esprimebla matematike, enkonduko de binaraj variabloj en sistemon de linearaj trud-asertoj foje riveliĝas delikata. Krome, la funkciigo de la ĝenerala problemo estas tiuokaze pli komplika ĉar ĝi dependas de plia logika problemo aldone al la reel-nombra problemo.

La formulado-katalogo ĉi-tie proponata, ebligas almenaŭ seniĝi je la kompleksеco devena de tiuj logikaj problemoj.

Linear integer programming

Making use of automatic solvers and linear programming techniques is not always the most appropriate method for solving a linear problem solely involving integer variables, and even less so for logical variables. However, many linear programming problems require the use of local discrete variables, integer or even logical (condition, ensemble, order, list, tree...) Despite being easily expressible mathematically, the introduction of logical variables in a system of linear constraints can sometimes be a delicate procedure. Furthermore, the implementation of the general problem is complicated in such cases, as it depends on an additional logic problem on top of the strictly numerical one.

The online catalogue of formulations proposed here eliminates the complications due to such logic problems.

Programmazione lineare con numeri interi

Usare risolutori automatici e tecniche di programmazione lineare non è sempre il metodo più adeguato per risolvere un problema che contiene solamente variabili intere, tanto più se queste variabili sono binarie. Tuttavia, molti problemi di programmazione lineare rendono necessario l’uso locale di variabili discrete, intere o perfino binarie (condizione, insieme, ordine, lista, albero, ecc..). Sebbene facilmente esprimibile matematicamente, l'introduzione di variabili binarie in un sistema di vincoli lineari è spesso delicata. A parte questo, la messa a punto del problema generale è in tal caso più complessa poiché dipende da un ulteriore problema di logica oltre che dallo stretto problema numerico.

Il catalogo di formulazioni proposto, rende possibile almeno il superamento della complessità dovuta a tali problemi logici.

Programmation linéaire en nombres entiers

Utiliser un solveur et des techniques de programmation linéaire n'est pas toujours la méthode la plus appropriée pour résoudre un problème linéaire entièrement en variables entières, encore moins quand ces variables sont booléennes. Toutefois, de nombreux problèmes de programmation linéaire nécessitent localement l'utilisation de variables discrètes, entières ou même booléennes (condition, ensemble, ordre, liste, arbre, …). Bien que d'expression mathématique simple, l'insertion de ces variables booléennes dans un jeu de contraintes linéaires est parfois délicate. De plus, la mise au point du problème général devient tributaire d'un problème logique supplémentaire.

Le catalogue de formulations proposé ici, permet de s'affranchir de la complexité inhérente à l'expression des ces briques élémentaires.

Enhavo

Paĝoj

Antaŭ-parolo

En lineara programado, la trudoj esprimiĝas jene : $A \geq B$ (i.e. $A=B$)

La solvilo (solvo-serĉilo / solvo-motoro) uzas komputikajn rimedojn => la uzata nombro formato estas *float* (ŝvebo-koma). La variabloj do ne estas strikta-sence reelaj (nefinieco kaj kontinuo ne havas signifon). Korolarie, la nocio "malfermita intervalo" ne havas signifon, kaj same $A>B$, $A<B$ aŭ $A \neq B$.

Praktike, sufiĉas uzi konstantojn kiajn :

ε (arbitre malgranda valoro)
∞ (arbitre granda valoro)

En lineara programado, la variabloj estas principe pozitivaj aŭ nulaj. Eblas pritrakti negativajn variablojn post eksplicita deklaro. Se ne, post translato eblas uzo de :

ω (mezgranda valoro)

Eĉ se la entjera tipo estas proponata, la kalkuloj estas plenumitaj en la ŝvebo-koma nombro-tipo. La deklaro de la entjera tipo nur limigas aposteriore la solvo-spacon. Estas do iluzie kredi ke la mezo $N = 0.5N_1 + 0.5N_2$ de du entjeroj (valorantaj ekzemple resp. 1 kaj 2) estas entjero pretekste ke la rezulto retroviĝas en entjero. La rezulto estas 1,5 do la problemo restas sensolva (ĉar neniu entjero valoras 1,5)

Eĉ kiam la problemo estas priskribita per procedura lingvo (sekvenca), la lineara programado estas deklara (fakta). La konataj instrukcioj kiaj "*while* kondiĉo *do* …", "*for* (; ;) … " aŭ "*if* kondiĉo *then* … *else* …" (resp. en Esperanto "*tiom* kondiĉo *kiom* …", "*por* (; ;) … " aŭ "*se* kondiĉo *tiam* … *male* …") havas neniun sekvencan signifon, nur trude faktan. Konsekvence :

. "*tiom*" aŭ "*por*" pli-malpli signifas : "*por ĉiu*" ($\forall$) ;
. "*se* kondiĉo *tiam* … *male* …" signifas ke, laŭ la kondiĉo (laŭ la valoroj de variabloj), oni trudas jene aŭ jene ;
. la formoj "cond_1" *kaj/aŭ* "cond_2" estas komutativaj kaj esprimas logiko-tabelon, sed ne implicas sinsekvon de testoj.

Ĉi-kuntekste, esprimi :	*se* "kond" *tiam* "trudo_1" *male* "trudo_2"
ekvivalentas la sistemon :	*se* "trudo_1" ne estas vera *tiam* ankaŭ "kond" ne estas
	se "trudo_2" ne estas vera *tiam* "kond" estas

Fakte, ne "kond", laŭ sia valoro, propra-sence implicas iun trudon aŭ alian, nek male la vereco de unu el ambaŭ trudoj determinas la valoron de iu binaro, sed temas pri sistemo de **tri trudoj** veraj aŭ ne, laŭ logiko-tabelo. Enfine, ja la tuta sistemo estu fakta (ne aparta aserto). Estas notinde ke en la ĉi-supra ekzemplo, se unu estas vera la alia ne estu, aŭ ja la tuta sistemo estas sensolva.

Koncerne la kosto-funkcion, la solviloj ĝenerale ne akceptas negativajn signojn kiel en min $(\alpha A - \beta B)$, eĉ se la entuta esprimo estas certe pozitiva.

En la ĉi-sekvaj alineoj :

La majuskloj simbolas la variablojn de la trud-sistemo

X aŭ *Y* simbolas binarajn variablojn

N simbolas entjerajn variablojn

K simbolas "reelajn" variablojn

A, B, C kaj *D* simbolas ajnajn membrojn de trudoj aŭ kondiĉoj

U_j, V_j simbolas elementojn de variablo-sinsekvoj (n-opo)

La minuskloj (*q, k, t, …*) simbolas konstantojn aŭ eksterajn variablojn (kies valorojn fiksas ne la trud-problemo)

b signifas "bazo de numerado"

q signifas "kvanto" ("quantité" en la franca)

k, f(k) estas "variabloj" de funkcio

t signifas "tolero"

Rimarkoj :

^	aŭ-o ekskluziva
$\overline{X}$	malo de binaro : $\overline{X} = (1 - X)$
X = (kondiĉo)	se la kondiĉo estas vera $X = 1$ male $X = 0$
K = (kondiĉo) ? K_1 : K_2	se la kondiĉo estas vera $K = K_1$ male $K = K_2$

Trudi : $K \in \cup\{k_j\}$

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj X_j

Formulado

$$\sum_j X_j = 1$$

$$K = \sum_j k_j X_j$$

Trudi : $K \in \cup\lfloor k_j, k_{j'} \rfloor \cup \{0\}$

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj X_j

n reelaj variabloj K_j

Formulado

$$K = \sum_j K_j$$

$$\sum_j X_j \le 1$$

$$\forall j \;\; K_j \ge k_j X_j$$

$$\forall j \;\; K_j \le k'_j X_j$$

Rimarko

tiu metodo ne povas koncerni variablojn $K \in \cup\lfloor K_j, K'_j \rfloor \cup \{0\}$

Trudi : $K \in \cup\lfloor k_j, k_{j'} \rfloor$

Aldonitaj variabloj

n variables binaires X_j

n variables réelles K_j

Formulado

$$K = \sum_j K_j$$

$$\sum_j X_j = 1$$

$$\forall j \;\; K_j \ge k_j X_j$$

$$\forall j \;\; K_j \le k'_j X_j$$

Rimarkoj

tiu metodo ne povas koncerni variablojn $K \in \cup\lfloor K_j, K'_j \rfloor$

kiam ne estas pli ol du intervaloj, eblas fari $X_1 = 1 - X_2$

Trudi : $K \neq k$

Metodo

laŭ la antaŭa formulado, K_1 inter 0 kaj k-ε , K_2 inter k+ε kaj ∞

Aldonitaj variabloj

binara variablo X reelaj variabloj K_1 K_2

Formulado

$$K = K_1 + K_2$$
$$K_1 \leq (k - \varepsilon)X$$
$$K_2 \geq (k + \varepsilon)(1 - X)$$
$$K_2 \leq (1 - X).(\infty)$$

Rimarkoj

por entjeroj $N \neq n$, ε eventuale valoras 1

tiu metodo ne povas koncerni du variablojn $K_1 \neq K_2$

Trudi : $K_1 > K_2$

Metodo

$K_1 \geq K_2$ kaj $K_1 \neq K_2$

Formulado

$$K_1 \geq K_2 + \varepsilon$$

Rimarko

por entjeroj $N_1 > N_2$, ε eventuale valoras 1

Trudi : $K_1 \neq K_2$

Metodo

$K_1 - K_2 \geq \varepsilon$ aŭ $K_2 - K_1 \geq \varepsilon$

Aldonitaj variabloj

binara variablo X

Formulado

$$K_1 - K_2 \geq X.(-\infty) + \varepsilon$$
$$K_2 - K_1 \geq (1 - X).(-\infty) + \varepsilon$$

Rimarko

por entjeroj $N_1 \neq N_2$, ε eventuale valoras 1

Trudi : $K_1 \approx K_2$ (tolero t)

Formulado

$$K_1 - K_2 \leq t$$
$$K_2 - K_1 \leq t$$

Trudi : $N = E(K)$, entjera valoro (rondigita je suba nombro ; funkcio *floor*)

Metodo

$N \leq K$, $N+1 \geq K$ kaj $N+1 \neq K$

Aldonitaj variabloj

binara variablo X

Formulado

$N \leq K$

$N+1 \geq K+\varepsilon$

Trudi : $N = ceil(K)$, rondigita je supera valoro

Metodo

$N \geq K$, $N-1 \leq K$ kaj $N-1 \neq K$

Aldonitaj variabloj

binara variablo X

Formulado

$N \geq K$

$N-1 \leq K-\varepsilon$

Trudi : $K_1 = |K_2|$

Metodo

$K_3 = K_2 + \omega$ (eventuale ekster la problemo submetita al la solvilo)

se $K_3 \geq \omega$ tiam $K_1 = K_3 - \omega$ male $K_1 = \omega - K_3$

la formulado de kondiĉo renkonteblos poste

Aldonita variablo

binara variablo X

Formulado

$K_3 - \omega \geq (1-X).(-\infty)$

$\omega - K_3 \geq X.(-\infty)$

$K_1 - K_3 + \omega \geq (1-X).(-\infty)$

$K_3 - \omega - K_1 \geq (1-X).(-\infty)$

$K_1 - \omega + K_3 \geq X.(-\infty)$

$\omega - K_3 - K_1 \geq X.(-\infty)$

Rimarko

se la variabloj povas esti negativaj, rekte asertu $\omega = 0$, kaj do $K_3 = K_2$

Trudi : $K = \sup(K_1, K_2)$

Metodo

se $K_1 \geq K_2$ tiam $K = K_1$ male $K = K_2$

la formulado de kondiĉo renkonteblos poste

Aldonita variablo

binara variablo X

Formulado

$K_1 - K_2 \geq (1 - X).(-\infty)$

$K_2 - K_1 - \varepsilon \geq X.(-\infty)$

$K_1 - K \geq (1 - X).(-\infty)$

$K - K_1 \geq (1 - X).(-\infty)$

$K_2 - K \geq X.(-\infty)$

$K - K_2 \geq X.(-\infty)$

Rimarko

por entjeroj $N = \sup(N_1, N_2)$, ε eventuale valoras 1

Trudi : $K = \sup(K_1, K_2)$ (pli simpla varianto)

Metodo

K estas pli granda ol K_1 kaj ol K_2, kaj pli malgranda ol almenaŭ unu el ambaŭ

la formulado de *"ol almenaŭ unu el ambaŭ"* renkonteblos poste binaraj variabloj X_1 X_2

Formulado

$K \geq K_1$

$K \geq K_2$

$K_1 \geq K + X_1.(-\infty)$

$K_2 \geq K + X_2.(-\infty)$

$X_1 + X_2 \leq 1$

Trudi : $K = \sup(K_j)$

Metodo

K estas pli granda ol ĉiuj ol K_j, kaj pli malgranda ol almenaŭ unu el ili

la formulado de *" ol almenaŭ unu el ili"* renkonteblos poste

Aldonita variablo

n binaraj variabloj X_j

Formulado

$\forall j \in [1, n]\ K \geq K_j$

$\forall j \in [1, n]\ K_j \geq K + X_j.(-\infty)$

$\sum_j (1 - X_j) \geq 1$

Traduki : se $(A > B)$ tiam $X = 1$

Formulado

$B - A \geq X.(-\infty)$

Traduki : se $(A \neq B)$ tiam $X = 1$

Formulado

$B - A \geq X.(-\infty)$

$A - B \geq X.(-\infty)$

Traduki : se $(A \geq B)$ tiam $X = 1$

Formulado

$B - A - \varepsilon \geq X.(-\infty)$

Rimarko

por entjeroj : se $(N_1 \geq N_2)$ tiam $X = 1$, ε eventuale valoras 1

Traduki : se $(A = B)$ tiam $X = 1$

Metodo

se $(A \geq B)$ tiam $X_1 = 1$, se $(B \geq A)$ tiam $X_2 = 1$, kaj $X = 1$ se X_1 kaj X_2 valoras 1

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj X_1 X_2

Formulado

$B - A - \varepsilon \geq X_1.(-\infty)$

$A - B - \varepsilon \geq X_2.(-\infty)$

$X_1 + X_2 \leq X + 1$

Rimarko

por entjeroj : se $(N_1 = N_2)$ tiam $X = 1$, ε eventuale valoras 1

Traduki : se $(A \approx B)$ (tolero t) tiam $X = 1$

Metodo

se $(A \geq B - t)$ tiam $X_1 = 1$, se $(B \geq A - t)$ tiam $X_2 = 1$, kaj $X = 1$ se X_1 kaj X_1 valoras 1

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj X_1 X_2

Formulado

$B - A - t - \varepsilon \geq X_1.(-\infty)$

$A - B - t - \varepsilon \geq X_2.(-\infty)$

$X_1 + X_2 \leq X + 1$

Rimarko

por entjeroj : se $(N_1 \approx N_2)$ tiam $X = 1$, ε eventuale valoras 1

Traduki la kondiĉon : $X = (A > B)?$

Metodo

se $A > B$ tiam $X = 1$ se $A \leq B$ tiam $X = 0$

Formulado

$A - B - \varepsilon \geq (1 - X).(-\infty)$

$B - A \geq X.(-\infty)$

Rimarko

por entjeroj $X = (N_1 > N_2)?$, ε eventuale valoras 1

Traduki la kondiĉon : $X = (A \neq B)?$

Metodo

$X_1 = (A > B)?$, $X_2 = (B > A)?$ kaj $X = X_1$ *aŭ* X_2

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj X_1 X_2

Formulado

$A - B - \varepsilon \geq (1 - X_1).(-\infty)$

$B - A \geq X_1.(-\infty)$

$B - A - \varepsilon \geq (1 - X_2).(-\infty)$

$A - B \geq X_2.(-\infty)$

$X \leq X_1 + X_2$

$2X \geq X_1 + X_2$

Rimarko

por entjeroj $X = (N_1 \neq N_2)?$, ε eventuale valoras 1

Traduki la kondiĉon : $X = (A \geq B)?$

Metodo

se $A \geq B$ tiam $X = 1$ se $A < B$ tiam $X = 0$

Formulado

$A - B \geq (1 - X).(-\infty)$

$B - A - \varepsilon \geq X.(-\infty)$

Rimarko

por entjeroj $X = (N_1 \geq N_2)?$, ε eventuale valoras 1

Traduki la kondiĉon : $X = (A = B)?$

Metodo

$X_1 = (A \geq B)?$, $X_2 = (B \geq A)?$ kaj $X = X_1 \; kaj \; X_2$

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj X_1 X_2

Formulado

$A - B \geq (1 - X_1).(-\infty)$

$B - A - \varepsilon \geq X_1.(-\infty)$

$B - A \geq (1 - X_2).(-\infty)$

$A - B - \varepsilon \geq X_2.(-\infty)$

$2X \leq X_1 + X_2$

$X + 1 \geq X_1 + X_2$

Rimarko

por entjeroj $X = (N_1 = N_2)?$, ε eventuale valoras 1

Traduki la kondiĉon : $X = (A \approx B)?$ (tolero t)

Metodo

$X_1 = (A \geq B - t)?$, $X_2 = (B \geq A - t)?$ kaj $X = X_1 \; kaj \; X_2$

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj X_1 X_2

Formulado

$A - B + t \geq (1 - X_1).(-\infty)$

$B - A - t - \varepsilon \geq X_1.(-\infty)$

$B - A + t \geq (1 - X_2).(-\infty)$

$A - B - t - \varepsilon \geq X_2.(-\infty)$

$2X \leq X_1 + X_2$

$X + 1 \geq X_1 + X_2$

Rimarko

por entjeroj $X = (N_1 \approx N_2)?$, ε eventuale valoras 1

Kiam trudo $A_j \geq B_j$ ne koncernas sub-aron S (kies elementoj obeas Y_j=1)

Esprimo

$$Y_j = 0 \Rightarrow A_j \geq B_j$$

Formulado

$$\forall j \quad A_j \geq B_j + Y_j.(-\infty)$$

Kiam trudo $A_j = B_j$ ne koncernas sub-aron S (kies elementoj obeas Y_j=1)

Esprimo

$$Y_j = 0 \Rightarrow A_j = B_j$$

Formulado

$$\forall j \quad A_j \geq B_j + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \quad B_j \geq A_j + Y_j.(-\infty)$$

Kiam trudo $A_j \neq B_j$ ne koncernas sub-aron S (kies elementoj obeas Y_j=1)

Esprimo

$$Y_j = 0 \Rightarrow A_j \neq B_j$$

Aldonita variablo

binaraj variabloj X_j

Formulado

$$\forall j \quad A_j \geq B_j + X_j.(-\infty) + \varepsilon + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \quad B_j \geq A_j + (1 - X_j).(-\infty) + \varepsilon + Y_j.(-\infty)$$

Trudi ke : el n trudoj $A_j \geq B_j$, minimume m estu efektivaj

Esprimo

$$\sum_j (A_j \geq B_j) \geq m$$

Metodo

se la trudo j ne estas efektiva tiam Y_j valoru 1

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj Y_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \;\; A_j \geq B_j + Y_j.(-\infty)$$

$$\sum_j (1 - Y_j) \geq m$$

Krom-kosto P por ĉiu ne efektiva $(Y_j = 1)$:

$$\min\, (kosto + \sum_j P.Y_j)$$

Trudi ke : el n trudoj $A_j = B_j$, minimume m estu efektivaj

Esprimo

$$\sum_j (A_j = B_j) \geq m$$

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj Y_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \;\; A_j \geq B_j + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \;\; B_j \geq A_j + Y_j.(-\infty)$$

$$\sum_j (1 - Y_j) \geq m$$

Trudi ke : el n trudoj $A_j \geq B_j$, maksimume m estu efektivaj

Esprimo

$$\sum_j (A_j \geq B_j) \leq m$$

Metodo

se la mala trudo j ne estas efektiva tiam Y_j valoru 1

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj Y_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \;\; B_j \geq A_j + \varepsilon + Y_j.(-\infty)$$

$$\sum_j (1 - Y_j) \geq n - m$$

Trudi ke : el n trudoj $A_j = B_j$, maksimume m estu efektivaj

Esprimo

$$\sum_j (A_j = B_j) \le m$$

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj X_j

n binaraj variabloj Y_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \;\; A_j \ge B_j + \varepsilon + X_j.(-\infty) + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \;\; B_j \ge A_j + \varepsilon + (1 - X_j).(-\infty) + Y_j.(-\infty)$$

$$\sum_j (1 - Y_j) \ge n - m$$

Trudi ke : el n trudoj $A_j \ge B_j$, ekzakte m estu efektivaj

Esprimo

$$\sum_j (A_j \ge B_j) = m$$

Metodo

se la trudo ne estas efektiva tiam Y_j valoru 1

se la mala trudo ne estas efektiva tiam Y_j valoru 0

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj Y_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \;\; A_j \ge B_j + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \;\; B_j \ge A_j + \varepsilon + (1 - Y_j).(-\infty)$$

$$\sum_j (1 - Y_j) = m$$

Trudi ke : el n trudoj $A_j = B_j$, ekzakte m estu efektivaj

Esprimo

$$\sum_j (A_j = B_j) = m$$

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj X_j

n binaraj variabloj Y_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \;\; A_j \ge B_j + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \;\; B_j \ge A_j + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \;\; A_j \ge B_j + \varepsilon + X_j.(-\infty) + (1 - Y_j).(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \;\; B_j \ge A_j + \varepsilon + (1 - X_j).(-\infty) + (1 - Y_j).(-\infty)$$

$$\sum_j (1 - Y_j) = m$$

Trudi ke : la aro *(E_i)*, estu inkludita kiel la aro *(F_j)*

Esprimo

$$\forall i \in [1,n]\ \exists j \in [1,m]\ /\ E_i \neq F_j$$

Aldonitaj variabloj

n.m binaraj variabloj Y_{ij}

Formulado

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ E_i \geq F_j + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ F_j \geq E_i + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\sum_i \sum_j Y_{ij} = n$$

Traduire X = (la aro *(E_i)*, estas inkludita kiel la aro *(F_j)*) ?

Aldonitaj variabloj

n.m binaraj variabloj X_{ij}

n.m binaraj variabloj Y_{ij}

Formulado

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ E_i \geq F_j + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ F_j \geq E_i + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ E_i \geq F_j + \varepsilon + X_{ij}.(-\infty) + Y_{ij}.(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ F_j \geq E_i + \varepsilon + (1-X_{ij}).(-\infty) + Y_{ij}.(-\infty)$$

$$1 - X \leq n - \sum_i \sum_j Y_{ij}$$

$$n(1-X) \geq n - \sum_i \sum_j Y_{ij}$$

Trudi ke : la aro *(E_i)*, estu malsama kiel la aro *(F_j)*

Esprimo

$$\exists i \in [1,n]\ \forall j \in [1,n]\ /\ E_i \neq F_j$$

Aldonitaj variabloj

n.m binaraj variabloj Y_{ij}

Formulado

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,n]\ \ E_i \geq F_j + (1 - Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,n]\ \ F_j \geq E_i + (1 - Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\sum_i \sum_j Y_{ij} \leq n - 1$$

Traduire X = (la aro *(E_i)*, estas malsama kiel la aro *(F_j)*) ?

Aldonitaj variabloj

n.m binaraj variabloj X_{ij}

n.m binaraj variabloj Y_{ij}

Formulado

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,n]\ \ E_i \geq F_j + (1 - Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,n]\ \ F_j \geq E_i + (1 - Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,n]\ \ E_i \geq F_j + \varepsilon + X_{ij}.(-\infty) + Y_{ij}.(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,n]\ \ F_j \geq E_i + \varepsilon + (1 - X_{ij}).(-\infty) + Y_{ij}.(-\infty)$$

$$X \leq n - \sum_i \sum_j Y_{ij}$$

$$nX \geq n - \sum_i \sum_j Y_{ij}$$

Trudi ke : la n-opo *(U_j)*, estu malsama kiel la n-opo *(V_j)*

Esprimo

$$\exists j \in [1,n] \ / \ U_j \neq V_j$$

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj Y_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \ U_j \geq V_j + (1-Y_j).(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \ V_j \geq U_j + (1-Y_j).(-\infty)$$

$$\sum_j Y_j \leq n-1$$

Trudi ke : la n-opo *(U_j)*, estu inkludita en la m-opo *(V_j)*

Esprimo

$$\forall i \in [1,n] \ \exists j \in [1,m] \ / \ U_i = V_j$$

$$\forall i_1 \in [1,n] \ \forall i_2 \in [1,n] \ i_1 > i_2 \Rightarrow j_1 > j_2$$

Aldonitaj variabloj

$n.m$ binaraj variabloj Y_{ij}

Formulado

$$\forall i \in [1,n] \ \forall j \in [1,m] \ U_i \geq V_j + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n] \ \forall j \in [1,m] \ V_j \geq U_i + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n-1] \sum_j (Y_{ij} - Y_{i+1\,j}).b^{(m-j)} \geq \varepsilon \ \text{(se } n > 1\text{) kun } b > 1+\varepsilon$$

$$\forall i \in [1,n] \sum_j Y_{ij} = 1$$

Rimarko

se m ne estas tro granda, sufiĉas decidi ke b =2 (bazo de numerado plej rapida kaj simpla), male necesas uzon de pli malgranda valoro de b.

Trudi ke : la n-opo *(U_j)*, estu antaŭa al la n-opo *(V_j)* (laŭ "alfabeta" ordo)

Esprimo

$$\exists n' \in [1,n] \ / \ \forall j \in [1,n'] \ U_j \geq V_j \text{ kaj } (U_{n'} > V_{n'} \text{ aŭ } n'=n)$$

Aldonitaj variabloj

n binaraj variabloj Y_j kaj n binaraj variabloj Y'_j

Formulado

$$\forall j \in [1,n] \ U_j \geq V_j + (1-Y_j).(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \ V_j \geq U_j + \varepsilon + Y_j.(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \ V_j \geq U_j + (1-Y'_j).(-\infty)$$

$$\forall j \in [1,n] \ U_j \geq V_j + \varepsilon + Y'_j.(-\infty)$$

$$\sum_j (Y_j - Y'_j).b^{(n-j)} \geq 0 \text{ kun } b > 1$$

Rimarko

se m ne estas tro granda, sufiĉas decidi ke b =2 (bazo de numerado plej rapida kaj simpla), male necesas uzon de pli malgranda valoro de b.

Traduki : X = (la n-opo (U_j), estas inkludita en la m-opo (V_j)) ?

Aldonitaj variabloj

$n.m$ binaraj variabloj Y_{ij}

n binaraj variabloj X_i

Formulado

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ U_i \geq V_j + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ V_j \geq U_i + (1-Y_{ij}).(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n-1] \sum_j (Y_{ij} - (b-1).\sum_{k=1}^{n-i} Y_{i+k\ j}).b^{(m-j)} \geq \varepsilon + X_i.(-\infty)\ \ (\text{se } n > 1) \text{ kun } b > 1$$

$$\forall i \in [1,n] \sum_j Y_{ij} \leq 1$$

$$\forall i \in [1,n] \sum_j Y_{ij} \geq 1 + X_i.(-\infty)$$

$$\forall i \in [1,n]\ 1 - \sum_j Y_{ij} - \varepsilon \geq (1-X_i).(-\infty)$$

$$\min(\sum X_i)$$

$$1 - X \leq \sum X_i$$

$$n\ (1-X) \geq \sum X_i$$

Rimarko

se m ne estas tro granda, sufiĉas decidi ke b =2 (bazo de numerado plej rapida kaj simpla), tiuokaze la faktoro (b-1) povas malaperi

male necesas uzon de pli malgranda valoro de b.

Determini la minimuman nombron de modifoj por pasi de n-opo (U_i) al la m-opo (V_j)

Aldonitaj variabloj

$n.m$ binaraj variabloj Y_{ij}

n binaraj variabloj X_i

Formulado

$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ U_i \geq V_j + (1 - Y_{ij}).(-\infty)$

$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ \ V_j \geq U_i + (1 - Y_{ij}).(-\infty)$

$\forall i \in [1,n-1] \sum_j (Y_{ij} - (b-1).\sum_{k=1}^{n-i} Y_{i+k\ j}).b^{(m-j)} \geq \varepsilon + X_i.(-\infty)$ (se $n > 1$) kun $b > 1$

$\forall i \in [1,n] \sum_j Y_{ij} \leq 1$

$\forall i \in [1,n] \sum_j Y_{ij} \geq 1 + X_i.(-\infty)$

$\forall i \in [1,n]\ 1 - \sum_j Y_{ij} - \varepsilon \geq (1 - X_i).(-\infty)$

$\min(2.\sum X_i + m - n)$

Rimarkoj

se m ne estas tro granda, sufiĉas decidi ke b =2 (bazo de numerado plej rapida kaj simpla), tiuokaze la faktoro (b-1) povas malaperi

male necesas uzon de pli malgranda valoro de b.

$2.\sum X_i + m - n$ reprezentas la distancon de Levenshtein inter (U_i) kaj (V_j)

Ekzemple : d("NICHE", "CHIENS")=5 (=2x2+6-5)

Notinde : d("CHIENS", "NICHE")=5 (=2x3+5-6)

Kompreneble, se la n-opoj estas konataj, do d((u_i), (v_j)), sufiĉas antaŭ-aserti ke :

$\forall i \in [1,n]\ \forall j \in [1,m]\ u_i \neq v_j \Rightarrow Y_{ij} = 0$

Trudi : $X = X_1 \; a\grave{u} \; X_2$

Formulado

$$X \leq X_1 + X_2$$
$$2X \geq X_1 + X_2$$

Trudi : $X = X_1 \; a\grave{u} \; X_2 \; a\grave{u} \; \ldots X_n$

Formulado

$$X \leq \sum X_i$$
$$nX \geq \sum X_i$$

Trudi : $X = X_1 \; kaj \; X_2$

Formulado

$$2X \leq X_1 + X_2$$
$$X + 1 \geq X_1 + X_2$$

Trudi ke : $X = X_1 \; kaj \; X_2 \; kaj \; \ldots kaj \; X_n$

Formulado

$$nX \leq \sum X_i$$
$$X + n - 1 \geq \sum X_i$$

Trudi ke : $X = X_1 \wedge X_2$

Metodo

$X = ((X_1\ kaj\ \overline{X_2})\ a\grave{u}\ (\overline{X_1}\ kaj\ X_2))$

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj X_3 X_4

Formulado

$2X_3 \leq X_1 - X_2 + 1$

$X_3 + 1 \geq X_1 - X_2 + 1$

$2X_4 \leq X_2 - X_1 + 1$

$X_4 + 1 \geq X_2 - X_1 + 1$

$X \leq X_3 + X_4$

$2X \geq X_3 + X_4$

Rimarko

la formulado ne estas facile generaligebla al *n* binaroj

Trudi ke : $X = X_1 \wedge X_2$ (pli simpla varianto)

Formulado

$X \leq X_1 + X_2$

$X \leq 2 - X_1 - X_2$

$X \geq X_1 - X_2$

$X \geq X_2 - X_1$

Rimarkoj

la varianto de formulado estas do pli simpla por la "ekskluziva aŭ"

la formulado ne estas facile generaligebla al *n* binaroj

Trudi ke : $X = X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n$

Metodo

unu kaj nur unu X_i el *n* valoras 1 (vidu poste)

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj Y_1 Y_2

Formulado

$\sum X_i \leq nY_1$

$\sum X_i \geq Y_1$

$\sum X_i \geq 2 - 2Y_2$

$\sum X_i \leq n - (n-1)Y_2$

$2X \leq Y_1 + Y_2$

$X + 1 \geq Y_1 + Y_2$

Rimarko

oni retrovas similajn formulojn farante $X = (\sum X_i = 1)$?

Traduki : "se X tiam $A \geq B$ male $C \geq D$"

Formulado

$$A - B \geq (1 - X).(-\infty)$$
$$C - D \geq X.(-\infty)$$

Traduki : "se X tiam $A = B$ male $C = D$"

Formulado

$$A - B \geq (1 - X).(-\infty)$$
$$B - A \geq (1 - X).(-\infty)$$
$$C - D \geq X.(-\infty)$$
$$D - C \geq X.(-\infty)$$

Traduki : "se X_1 kaj X_2 tiam $A \geq B$ male $C \geq D$"

Formulado

$$A - B \geq (2 - \mathrm{X}_1 - X_2).(-\infty)$$
$$C - D \geq (1 + X_1 - X_2).(-\infty)$$
$$C - D \geq (1 + X_2 - X_1).(-\infty)$$
$$C - D \geq (X_1 + X_2).(-\infty)$$

Traduki : "se X_1 aŭ X_2 tiam $A \geq B$ male $C \geq D$"

Formulado

$$A - B \geq (2 - \mathrm{X}_1 - X_2).(-\infty)$$
$$A - B \geq (1 + X_1 - X_2).(-\infty)$$
$$A - B \geq (1 + X_2 - X_1).(-\infty)$$
$$C - D \geq (X_1 + X_2).(-\infty)$$

Traduki : "se X_1 ^ X_2 tiam $A \geq B$ male $C \geq D$"

Formulado

$$C - D \geq (2 - \mathrm{X}_1 - X_2).(-\infty)$$
$$A - B \geq (1 + X_1 - X_2).(-\infty)$$
$$A - B \geq (1 + X_2 - X_1).(-\infty)$$
$$C - D \geq (X_1 + X_2).(-\infty)$$

X =1 se minimume m el la n elementoj X_i de aro estas selektitaj (X_i =1)

Esprimo

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \geq m \Rightarrow X = 1$$

Formulado

$$\sum X_i \leq (n-m+1)X + m - 1$$

X=1 se minimume m el la n elementoj X_i de aro estas selektitaj (X_i =1)

Esprimo

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \geq m \Leftrightarrow X = 1$$

Formulado

$$\sum X_i \leq (n-m+1)X + m - 1$$

$$\sum X_i \geq mX$$

X =1 se maksimume m el la n elementoj X_i de aro estas selektitaj (X_i =1)

Esprimo

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \leq m \Rightarrow X = 1$$

Formulado

$$\sum X_i \geq m + 1 - (m+1)X$$

X=1 se maksimume m el la n elementoj X_i de aro estas selektitaj (X_i =1)

Esprimo

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \leq m \Leftrightarrow X = 1$$

Formulado

$$\sum X_i \geq m + 1 - (m+1)X$$

$$\sum X_i \leq n - (n-m)X$$

X=1 se ekzakte *m* el la *n* elementoj X_i de aro estas selektitaj (X_i =1)

Esprimo

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = m \Rightarrow X = 1$$

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj Y_1 Y_2

Formulado

$$\sum X_i \le (n-m+1)Y_1 + m - 1$$
$$\sum X_i \ge m + 1 - (m+1)Y_2$$
$$2X \le Y_1 + Y_2$$
$$X + 1 \ge Y_1 + Y_2$$

X=1 se ekzakte *m* el la *n* elementoj X_i de aro estas selektitaj (X_i =1)

Esprimo

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = m \Leftrightarrow X = 1$$

Aldonitaj variabloj

binaraj variabloj Y_1 Y_2

Formulado

$$\sum X_i \le (n-m+1)Y_1 + m - 1$$
$$\sum X_i \ge mY_1$$
$$\sum X_i \ge m + 1 - (m+1)Y_2$$
$$\sum X_i \le n - (n-m)Y_2$$
$$2X \le Y_1 + Y_2$$
$$X + 1 \ge Y_1 + Y_2$$

Trudi ke : sub-aro S' (kies elementoj obeas $X_i=1$) de aro E, estu inkludita en sub-aro S

Esprimo

$$S'_{X_i=1} \subset S$$

Formulado

$$\sum_{E-S} X_i = 0$$

Trudi ke : sub-aro S' (kies elementoj obeas $X_i=1$) de aro E, ne estu inkludita en sub-aro S

Esprimo

$$S'_{X_i=1} \not\subset S$$

Formulado

$$\sum_{E-S} X_i \geq 1$$

Trudi ke : sub-aro S' (kies elementoj obeas $X_i=1$) de aro E, estu super-aro de sub-aro S

Esprimo

$$S \subset S'_{X_i=1}$$

Formulado

$$\sum_{S} X_i = kard(S)$$

Trudi ke : sub-aro S' (kies elementoj obeas $X_i=1$) de aro E, ne estu super-aro de sub-aro S

Esprimo

$$S \not\subset S'_{X_i=1}$$

Formulado

$$\sum_{S} X_i \leq kard(S) - 1$$

Trudi ke : sub-aro S' (kies elementoj obeas $X_i=1$) de aro E, estu diferenca de sub-aro S

Esprimo

$$S'_{X_i=1} \neq S$$

Formulado

$$\sum_{S} X_i \leq \sum_{E-S} X_i + kard(S) - 1$$

Trovi sub-aron de aro E por kiu la sumo de la kvantoj q_i asociitaj al ĝiaj elementoj plej proksimiĝas al la valoro q_{cible} laŭ tolero t

Aldonita variablo

reela variablo Q_{diso}

Formulado

$$\sum_E X_i.q_i - Q_{diso} \leq q_{celo} + t$$

$$\sum_E X_i.q_i + Q_{diso} \geq q_{celo} - t$$

celo : $\min(Q_{diso})$

Trovi n disajn kaj komplementajn sub-arojn de aro E por kiuj sumoj de la kvantoj q_i asociitaj al iliaj elementoj, havu kiel eble plej inter si proksimajn valorojn

Aldonita variablo

reela variablo Q_{ecart}

Formulado

$$\forall j \in [1, n]$$

$$\sum_i X_{ij}.q_i - Q_{diso} \leq q_{mezo}$$

$$\sum_i X_{ij}.q_i + Q_{diso} \geq q_{mezo}$$

$\forall i \leq kard(E) \ \sum_j X_{ij} = 1$ (disaj kaj komplementaj)

celo : $\min(Q_{diso})$

Rimarko

q_{mezo} estas anstataŭigeblaj de q_j (celo-valoro de ĉiu sub-aro),

kun $\sum_j q_j = \sum_i q_i$

Priskribi kontinuan funkcion ($k \to f(k)$) laŭpece linearan

Esprimo

$\forall i \in [1,n]\ k \in [k_i, k_{i+1}] \Rightarrow f(k) = a_i k + b_i$ kun $k \in [k_1, k_{n+1}]$

Aldonitaj variabloj

n reelaj variabloj K_i

n +1 binaraj variabloj X_i

Formulado

$$\sum_i K_i = k$$

$$\forall i \in [1,n]\ X_{i+1} \le X_i$$

$$\forall i \in [1,n]\ 0 \le K_i \le (k_{i+1} - k_i).X_i$$

$$\forall i \in [1,n]\ (k_{i+1} - k_i).X_{i+1} \le K_i$$

$$f(k) = \sum_i a_i.K_i + a_1 k_1 + b_1$$

Rimarko 1

Se la funkcio estas laŭpece lineara sed nekontinua :

$f(k) = \sum_i a_i.K_i + \sum_i ((a_i - a_{i-1}).k_i + b_i - b_{i-1}).X_i$, kun $a_0 = b_0 = 0$

Rimarko 2

$f'(k) = \sum_i a_i.(X_i - X_{i+1})$ kun $X_{n+1} = 0$

Disigi *n* laŭ primoj (kun antaŭkono de ĉiuj malpli grandaj primoj)

Metodo

$n = \prod p_i^{N_i}$, do $\log(n) = \sum N_i.\log(p_i)$

Formulado

$\log(n) - \sum N_i.\log(p_i) \leq \varepsilon$

$\sum N_i.\log(p_i) - \log(n) \leq \varepsilon$

Rimarko

Se ne ekzistas solvo, *n* estas nova primo aŭ oblo de nova primo. Estas tre simple kompletigi la trudojn, por ke binara variablo *X* donu tiun tiun rezulton ε havas la rolon kompensi eventualajn proksimumaĵojn de la funkcio log. Ĝi estu malsupera al : log*(n+1)*-log*(n)*=log*(1+1/n),* do *1/((n+1) Log2).* Oni prenu ε *=(0,5 . 1,442695)/(n+1)*

Disigi *n* laŭ primoj (sen antaŭkono de ĉiuj malpli grandaj primoj)

Metodo

ju pli la disigo estas eriga (primoj) des pli la sumo de la potencoj estas granda

Formulado

$\log(n) - \sum N_i.\log(n_i) \leq \varepsilon$

$\sum N_i.\log(n_i) - \log(n) \leq \varepsilon$

$maks(\sum N_i)$

Rimarkoj

ĉiuj proponataj nombroj n_i valoras inter 2 kaj *n*

por efikigi la sistemon, eblas formeti el la listo ĉiujn oblojn de 2,3,5 escepte de 2,3,5 kaj de *n* mem

La kaŝita flanko de la kartoj

Prezento

Tri kartoj malsam-koloraj : *5*, *10*, *reĝo*.
La *5* situas dekstre de la *reĝo*.
Trefo situas maldekstre de *piko*.
La *10* situas maldekstre de *kero*.
Kero situas maldekstre de *piko*.
Laŭ kiu ordo situas la figuroj kaj la koloroj ?

Variabloj (ĉiuj inter 0 kaj 2)

$X_5, X_{10}, X_{reĝo}$
$X_{trefo}, X_{piko}, X_{kero}$

Formulado

$$X_5 \geq X_{reĝo} + 1$$

$$X_{trefo} \leq X_{piko} - 1$$

$$X_{10} \leq X_{kero} - 1$$

$$X_{kero} \leq X_{piko} - 1$$

Noto

Ne estas necese esprimi ke la tri figuroj (resp. la tri koloroj) estas ĉiuj malsamaj. Sed ĝenerale, tio estas necesa, almenaŭ parte. Ekzemple, la malsamlokecoj estas eksplicite esprimitaj nur pri *10* kaj *5,* resp. *kero* kaj *trefo, reĝo* kaj *10.*

Propono : Ununura estas malsupera ol 0 kaj la sumo valoras 3. Tiel, la tri valoroj estas 0, 1 kaj 2.

Rezulto

$X_{10} = 0, X_{reĝo} = 1, X_5 = 2$
$X_{trefo} = 0, X_{kero} = 1, X_{piko} = 2$

La kaŝita flanko de la kartoj

Prezento

Kvar kartoj je malsam-koloraj : *fanto, reĝino, reĝo, aso*.
La *piko* situas apud la *kero*.
La *trefo* situas apude-maldekstre de la *reĝo* aŭ de la *damo*.
La *reĝo* situas apude-dekstre de ruĝa karto.
La plej dekstra karto ne estas la *kero*.
Unu el la du kartoj ĉe la mezo estas la *fanto*.
La *reĝo* kaj la *damo* ne estas apudaj
Laŭ kiu ordo situas la figuroj kaj la koloroj ?

Variabloj (ĉiuj inter 0 kaj 3)

X_{fanto}, X_{damo}, $X_{reĝo}$, X_{aso}
X_{trefo}, X_{piko}, X_{karoo}, X_{kero}

Kromaj variabloj

X_1, X_2,
X_5, X_6,
X_9

Formulado

La *piko* situas apud la *kero*

$$X_{piko} \leq X_{karoo} + 1$$

$$X_{karoo} \leq X_{piko} + 1$$

La *trefo* situas apude-maldekstre de la *reĝo* aŭ de la *damo*

$$X_{trefo} \geq X_{reĝo} - 1 + X_1.(-\infty)$$

$$X_{reĝo} - 1 \geq X_{trefo} + X_1.(-\infty)$$

$$X_{trefo} \geq X_{damo} - 1 + X_2.(-\infty)$$

$$X_{damo} - 1 \geq X_{trefo} + X_2.(-\infty)$$

$$X_1 + X_2 = 1$$

La *reĝo* situas apude-dekstre de ruĝa karto

$$X_{reĝo} \geq X_{\text{ker}o} + 1 + X_5.(-\infty)$$

$$X_{kero} + 1 \geq X_{reĝo} + X_5.(-\infty)$$

$$X_{reĝo} \geq X_{karoo} + 1 + X_6.(-\infty)$$

$$X_{karoo} + 1 \geq X_{reĝo} + X_6.(-\infty)$$

$$X_5 + X_6 = 1$$

La plej dekstra karto ne estas la *kero*

$$X_{kero} \leq 2$$

Unu el la du kartoj ĉe la mezo estas la *fanto*

$$X_{fanto} \leq 2$$

$$X_{fanto} \geq 1$$

La *reĝo* kaj la *damo* ne estas apudaj

$$X_{reĝo} \geq X_{damo} + 2 + X_9.(-\infty)$$

$$X_{damo} \geq X_{reĝo} + 2 + (1 - X_9).(-\infty)$$

Noto

Estas necese esprimi ke la kvar figuroj (resp. la kvar koloroj) estas ĉiuj malsamaj (vidu la antaŭan problemon). Interalie pri X_{aso} kiu aperas en neniu trudo. Tio ne aperas ĉi-antaŭe (krom por X_{damo} kaj $X_{reĝo}$).

Propono : nur unu el la kvar estas malsupera ol 0, almenaŭ unu estas supera ol 3 kaj la sumo valoras 6. Tiel, la kvar valoroj estas 0, 1, 2 et 3.

Rezulto

$X_{aso} = 0$, $X_{damo} = 1$, $X_{valet} = 2$, $X_{reĝo} = 3$
$X_{trefo} = 0$, $X_{kero} = 1$, $X_{karoo} = 2$, $X_{piko} = 3$
kaj :
$X_1 = 1$, $X_2 = 0$
$X_5 = 1$, $X_6 = 0$
$X_9 = 0$

Dispartigo de boteloj

Prezento

21 boteloj : 7 plenaj, 7 mezplenaj, 7 malplenaj
La 3 personoj ricevu po 7 botelojn kaj saman likvo-kvanton

Variabloj

P1 , P2, P3 (plenaj)
M1, M2, M3 (mezplenaj)
V1, V2, V3 (malplenaj)

Formulado

$P1 + M1 + V1 = 7$
$P2 + M2 + V2 = 7$
$P3 + M3 + V3 = 7$

$P1 + 0.5\, M1 = 3.5$
$P2 + 0.5\, M2 = 3.5$
$P3 + 0.5\, M3 = 3.5$

$P1 + P2 + P3 = 7$
$M1 + M2 + M3 = 7$
$V1 + V2 + V3 = 7$

Rezulto

$P1=1$; $M1=5$; $V1=1$
$P2=3$; $M2=1$; $V2=3$
$P3=3$; $M3=1$; $V3=3$

Transiro de rivero

Prezento

Kvar personoj (A, B, C, D) devas transiri riveron. La necesaj daŭroj por transiri estas respektive : A (D_1=1 mn), B (D_2=2 mn), C (D_3=5 mn), D (D_4=10 mn)
Ne pli ol du personoj (*n* et *m*) estu sur la boato (t=sup (t_n,t_m))
La boato entenu almenaŭ unu personon (interalie por reveni)
Kiu estas la minimuma daŭro de la ĉiesa transiro ?

Variabloj

X_{ij} : persono *j* je la transiro *i* (*j* de 1 ĝis 4 ; *i* de 1 ĝis 5)
i = 1, 3 aŭ 5 : aliro
i = 2 aŭ 4 : reveno
D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 : daŭroj de la transiroj

Kromaj variabloj

$Y_{1j}, Y_{3j}, Y_{5j},$

Formulado

$$\forall i \in [1,5] \sum_j X_{ij} \le 2$$
$$\forall i \in \{2,4\} \sum_j X_{ij} \ge 1$$
$$\forall i \in \{1,3,5\}\ \forall j \in [1,4]\ X_{ij}.t_j \le D_i$$
$$\forall i \in \{1,3,5\}\ \forall j \in [1,4]\ X_{ij}.t_j \ge D_i - Y_{ij}.(-\infty)$$
$$\forall i \in \{1,3,5\} \sum_j Y_{ij} = 1$$
$$\forall i \in \{2,4\} \sum_j X_{ij}.t_j = D_i$$
$$\forall j \in [1,4]\ X_{1j} - X_{2j} \ge 0$$
$$\forall j \in [1,4]\ X_{1j} + X_{3j} - X_{2j} - X_{4j} \ge 0$$
$$\forall j \in [1,4]\ X_{1j} + X_{3j} + X_{5j} - X_{2j} - X_{4j} = 1$$

min $(D_1+D_2+D_3+D_4+D_5)$

Rezulto

$D_1 = 2, D_2 = 1, D_3 = 10, D_4 = 2, D_5 = 2$
Entuta daŭro : 17 mn
$X_{11} = X_{12} = 1$ (*A* kaj *B* transiras)
$X_{21} = 1$ (*A* revenas)
$X_{33} = X_{34} = 1$ (*C* kaj *D* transiras)
$X_{42} = 1$ (*B* revenas)
$X_{51} = X_{52} = 1$ (*A* kaj *B* transiras)

Malantaŭ la pordo

Prezento

Viro devas malfermi unu el du pordoj, sciante ke malantaŭ tiuj pordoj estas ĉu drako ĉu princino. Sed eble malantaŭas du princinoj, aŭ du drakoj ... Se li elektos princinon, li povos edziĝi kun ŝi, sed si li elektos drakon, li estos rostita ... Sur ambaŭ pordoj, videblas afiŝoj, kiuj ĉu ambaŭ verdiras, ĉu ambaŭ mensogas.
Sur la pordo 1 estas skribita : aŭ estas drako en ĉi tiu ĉelo aŭ estas princino en la alia.
Sur la pordo 2 estas skribita : estas princino en la alia ĉelo.
Kion entenas la unua ĉelo ? Kaj la dua ?

Variabloj

Xp_1 : pordo 1 : 0 se dragono, 1 se princino
Xp_2 : pordo 2 : 0 se dragono, 1 se princino
Xv_1 : aserto 1 : 0 se malvera, 1 se vera
Xv_2 : aserto 2 : 0 se malvera, 1 se vera

Kromaj variabloj

X_1, X_2, X_3, X_4
X_5, X_6

Formulado

$(Xv_1 \,\&\, Xv_2) \mid (!Xv_1 \,\&\, !Xv_2)$ = vrai
$(Xv_1 \,\&\, (!Xp_1 \mid Xp_2)) \mid (!Xv_1 \,\&\, (Xp_1 \,\&\, !Xp_2))$ = vrai
$(Xv_2 \,\&\, Xp_1) \mid (!Xv_2 \,\&\, !Xp_1)$ = vrai

pli simple :
$Xv_1 + Xv_2 \mathrel{!=} 1$
$Xv_1 + ((1\text{-}Xp_1) \mid Xp_2) \mathrel{!=} 1$
$Xv_2 + Xp_1 \mathrel{!=} 1$

pli simple :
$Xv_1 + Xv_2 \mathrel{!=} 1$
$Xv_1 + sup\,((1\text{-}Xp_1), Xp_2) \mathrel{!=} 1$
$Xv_2 + Xp_1 \mathrel{!=} 1$

per lineara formulado :

$$Xv_1 + Xv_2 \geq 1 + 1 + X_1.(-\infty)$$
$$Xv_1 + Xv_2 \leq 1 - 1 + (1 - X_1).(-\infty)$$

$$X_2 \geq 1 - Xp_1$$
$$X_2 \geq Xp_2$$
$$1 - Xp_1 \geq X_2 + X_5.(-\infty)$$
$$Xp_2 \geq X_2 + X_6.(-\infty)$$
$$X_5 + X_6 \leq 1$$
$$Xv_1 + X_2 \geq 1 + 1 + X_3.(-\infty)$$
$$Xv_1 + X_2 \leq 1 - 1 + (1 - X_3).(-\infty)$$

$$Xv_2 + Xp_1 \geq 1 + 1 + X_4.(-\infty)$$
$$Xv_2 + Xp_1 \leq 1 - 1 + (1 - X_4).(-\infty)$$

Rezulto

Estas princino en ĉiu ĉelo. Ambaŭ asertoj estas veraj.
$Xp_1 = Xv_1 = Xp_2 = Xv_2 = 1$
$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 1$; $X_6 = 0$

Neuf + deux = onze / *« naŭ + du = dek unu »* en la franca (kriptaritmo)

Prezento

Anstataŭigi ĉiujn el la ok literoj ene de tiuj tri vortoj per ciferoj tiel ke la sumo de la nombroj estu ĝusta.

Variabloj (binaraj)

X_{ij} ligo inter la litero i (de 1 ĝis 8 : *d, e, f, n, o, u, x, z*) kaj la cifero j (de 0 ĝis 9)

Y_i (i de 1 ĝis 7)

Formulado

Ununura cifero por ĉiu litero

$$\forall i \in [1,8] \sum_j X_{ij} = 1$$

Ne pli ol unu litero por ĉiu cifero

$$\forall j \in [0,9] \sum_i X_{ij} \leq 1$$

La sumo estu ĝusta

$$\sum_j (X_{7j} + X_{3j} - X_{2j} + 10.(2X_{6j} - X_{8j}) + 100.(2X_{2j} - X_{4j}) + 1000.(X_{1j} + X_{4j} - X_{5j})) = 0$$

Por ke la solvo-propono (da solvoj estas 44) estu plej proksima al ordo alfabeta

$$\forall i \in [1,7]\ \forall k \in [i+1,8] \ \sum_j 2^{(7-j)}(X_{ij} - X_{kj}) \geq (1 - Y_i)(-\infty)$$

$$\max(\sum_{i=1}^{7} Y_i)$$

Rezulto

6345 + 1348 = 7693 do : *d*=1, *e*=3, *f*=5, *n*=6, *o*=7, ***u*=4**, *x*=8, *z*=9

Christian Rivière

unua versio: 2011
reviziado : la 14[an] de aŭgusto 2013
lasta reviziado : la 17[an] de majo 2024